



XXVI^e Colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques

11-12 juin 2019 Strasbourg (France)

Initier au raisonnement dans le secondaire : intentions et réalités

Christine CHOQUET
MC ESPE Université de Nantes
christine.choquet@univ-nantes.fr

Sylvie GRAU
TP ESPE Docteur Université de Nantes
sylvie.grau@univ-nantes.fr



Trois problèmes

- Les angles
- La piscine
- Pression/température

Déroulement de l'atelier

- Première analyse *a priori* des problèmes par groupes (30 min)
- Proposition de compléments d'analyse dans deux cadres théoriques (20 min)
- Résultats d'expérimentations (20 min)
- Discussion (20 min)

Analyse *a priori* :

- Procédures de résolution
- Compétences qui doivent être mises en jeu par l'élève
- Critères pour savoir si l'élève a réussi
- Conceptions erronées qui peuvent apparaître
- Variables didactiques
- Variables pédagogiques



15 min

→ 5min de présentation par groupes

Deux cadres théoriques

- Double Approche didactique et ergonomique
(Robert, 2008)
→ Adaptations des connaissances
- Problématisation
(Fabre et Orange, 1997)
→ Nécessités et registres explicatifs

La double approche didactique et ergonomique (Robert 2008)

Dans le but d'analyser *a priori* les situations
en termes d'activités et d'adaptation des connaissances des élèves :

activités possibles des élèves (en lien avec la classe observée)

activité a minima : ce qu'un élève peut au minimum produire

activité a maxima : ce qu'un élève peut au mieux produire

Trois grands niveaux d'analyse des activités

1- Niveau global

Dynamique globale proposée aux élèves entre cours, exercices et problèmes. Dialectique outil/objet.
Construction de connaissances avec la classe puis exposition et institutionnalisation

2- Les tâches proposées

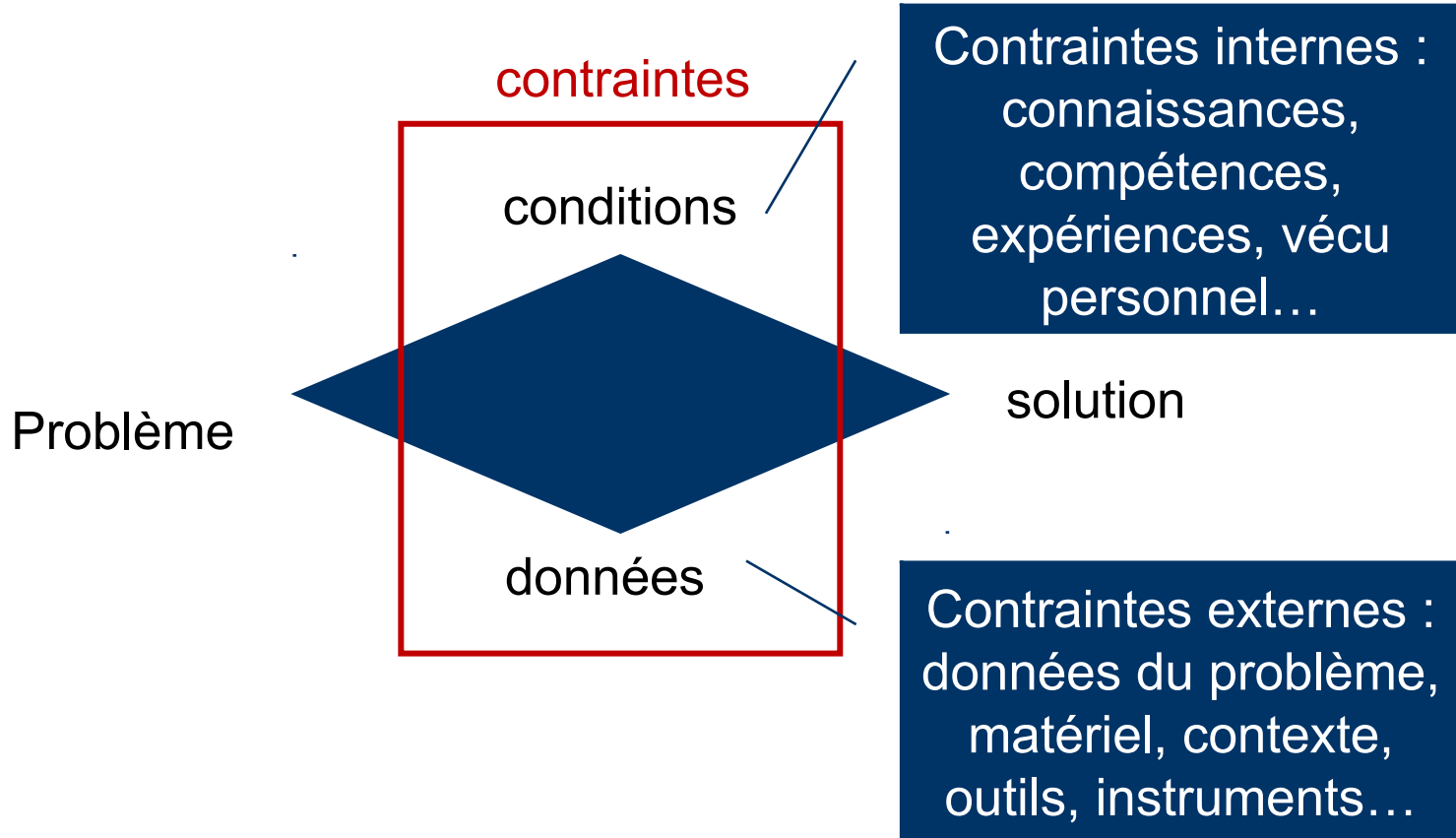
Tâches caractérisées ici par les mises en fonctionnement des connaissances anciennes ou nouvelles des élèves

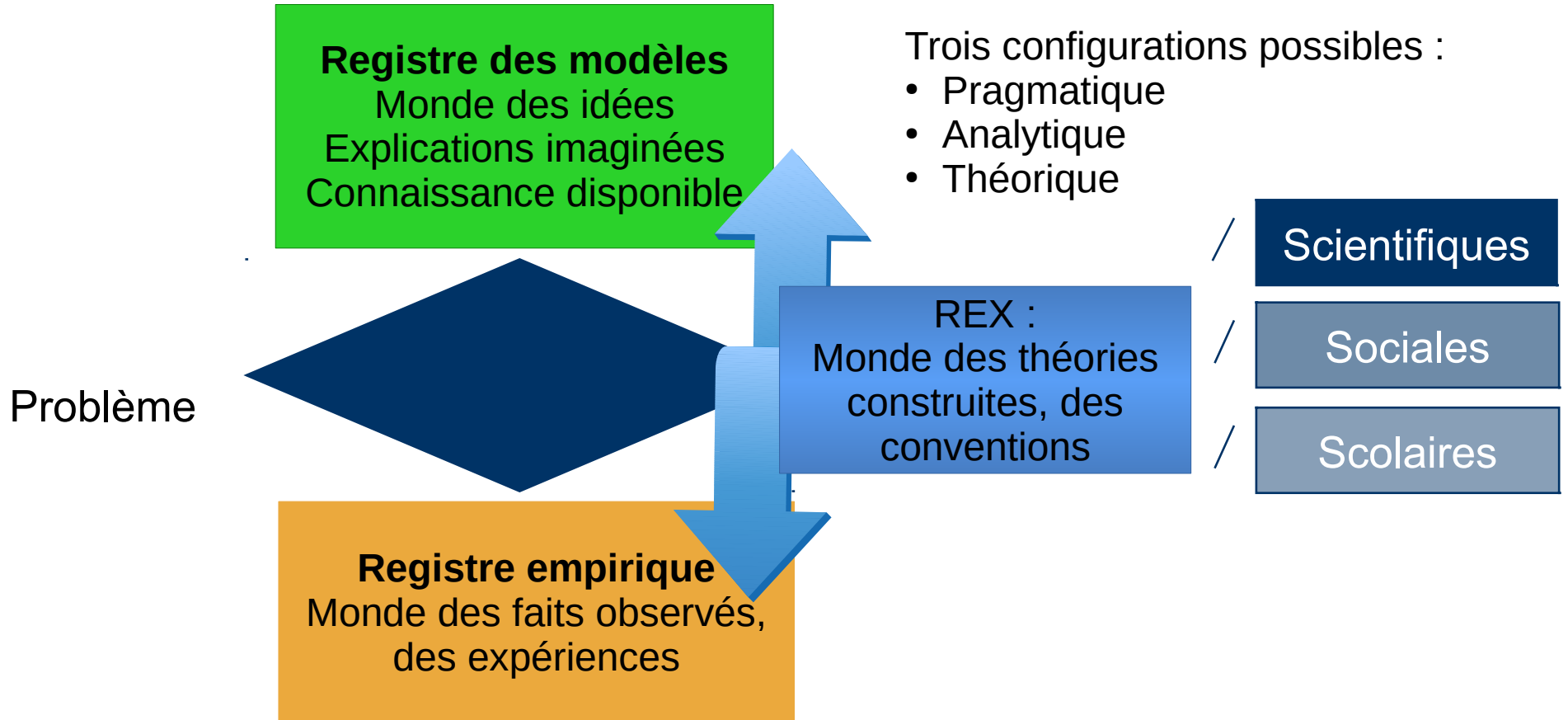
Pour chaque énoncé : repérage des adaptations que les élèves auront à faire des leurs connaissances (A1 à A7)

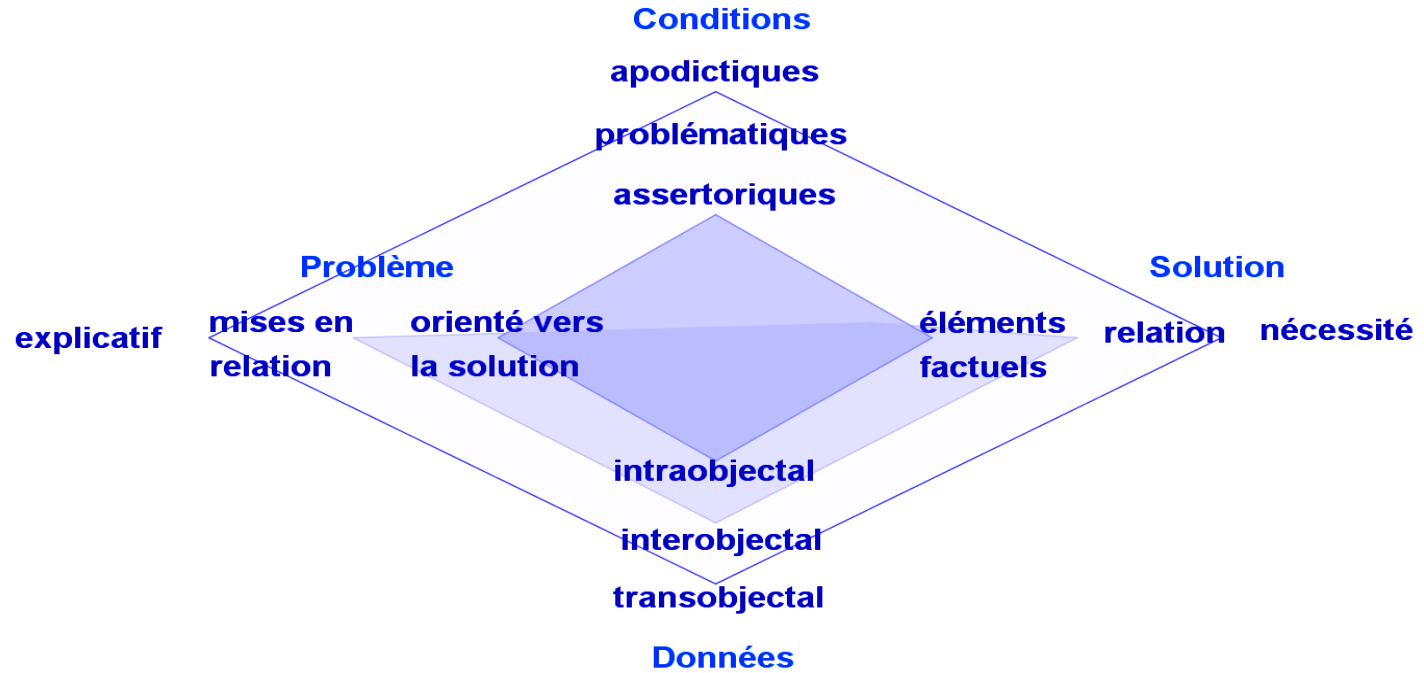
3- Les conditions de travail des élèves

Déduites des déroulements provoqués par l'enseignant : durée du travail des élèves selon les différentes tâches, nature du travail, qualité et nature des échanges, verbalisations demandées aux élèves, nature des validations données aux élèves, explications et aides données tout au long du travail, etc.

Problématiser



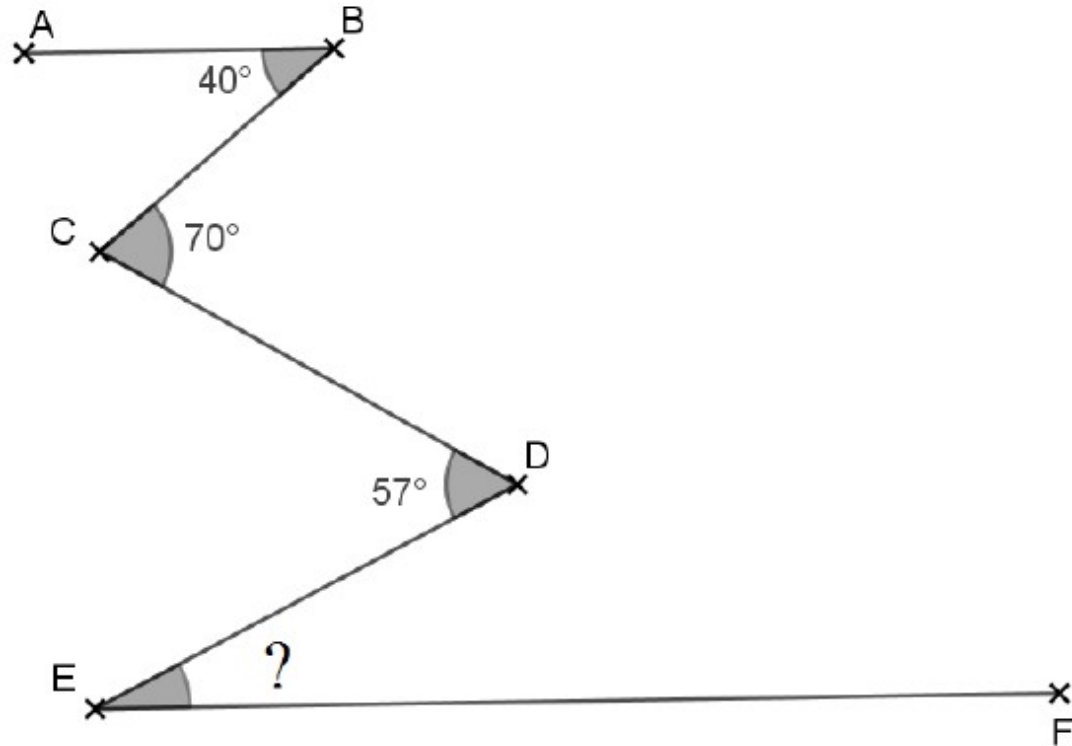




Les angles

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Question : Quelle est la mesure de l'angle DEF ?



Repérage *a priori* des adaptations des connaissances des élèves : *Les angles*

A1 reconnaissances des modalités d'application des connaissances : **la figure suggère des calculs de mesure d'angles**

A2 introduction d'intermédiaires : possibilités des prolonger des droites, d'introduire de nouveaux points

A3 mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue : **deux cadres, géométrique et numérique**

A4 introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) : imposée par la situation

~~A5 utilisation de questions précédentes dans un problème~~

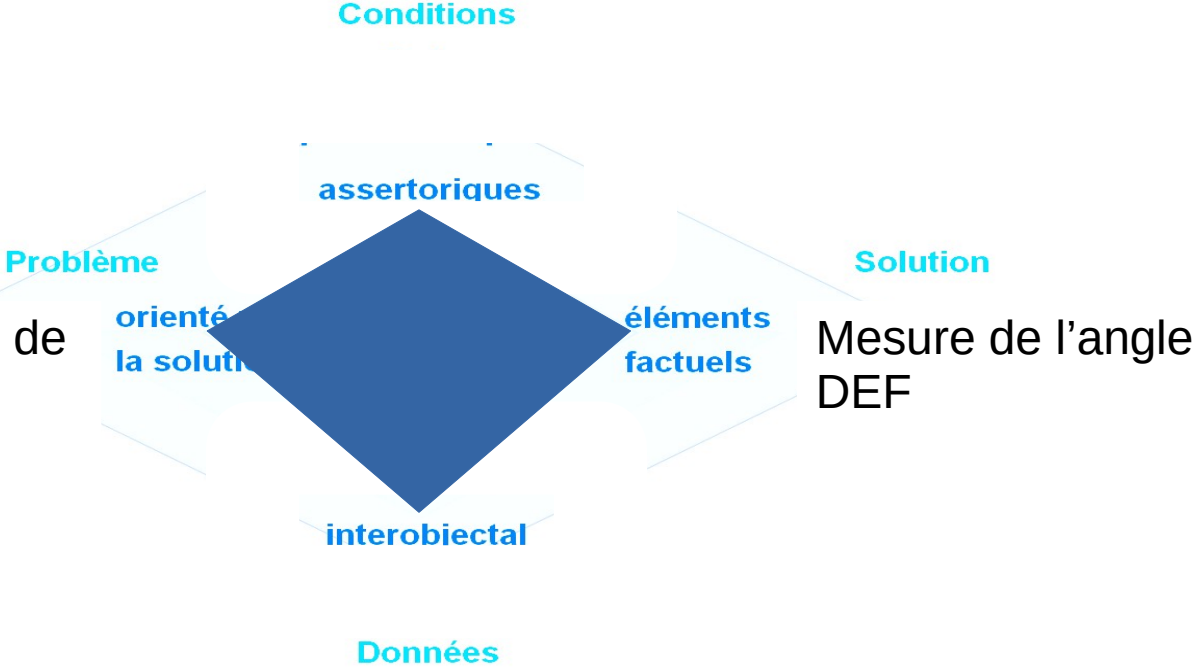
A6 existence de choix : dans l'utilisation des propriétés sur les mesures des angles

~~A7 : manque de connaissances nouvelles~~

A minima : calculs de quelques mesures d'angles, quelques tracés (de triangles), mesures sur la figure

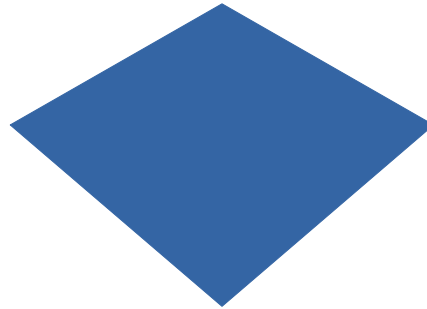
A maxima : les tracés utiles et l'organisation explicitée des calculs de mesures d'angles pour aboutir à 27° .

Quelle est la mesure de l'angle DEF ?



- Angles complémentaires, supplémentaires
- Angles alternes-internes
- Angles correspondants
- Somme des angles dans un triangle
- Angle plat = 180°
- On peut prolonger les tracés
- On peut relier des points pour obtenir des figures connues

Quelle est la mesure de l'angle DEF ?



Mesure de l'angle DEF

- Tracé d'une ligne brisée
- Mesures de certains angles
- Droites (AB) et (EF) parallèles

La piscine

La piscine

Marc, Jérémy, Vanessa et Medhi sont quatre carreleurs chargés de carreler les piscines (toutes identiques) d'un lotissement.

Leurs expériences professionnelles sont très différentes et jusqu'à présent, chacun posait seul les carreaux d'une piscine.

Ils décident aujourd'hui de travailler ensemble sur une même piscine.

- D'après les documents fournis ci-dessous, pourront-ils carreler entièrement une piscine durant une journée de travail ?

Doc. 1 Rythme régulier de travail

Marc et Vanessa : une piscine en 3 jours chacun

Medhi : une piscine en 5 jours

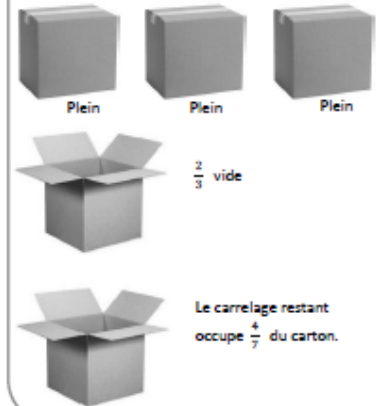
Jérémy : une piscine en 7 jours

Doc. 2 Message d'un collègue



Doc. 3 Conditionnement des carreaux

- 4 cartons pleins de carrelage : 26 m^2
- Quantité de carrelage disponible pour la journée :



Doc. 4 Caractéristiques de la piscine

Parallélepède rectangle :

- 2 m de large
- 4 m de long
- 1,5 m de profondeur



Repérage *a priori* des adaptations des connaissances des élèves : *La piscine*

A1 reconnaissances des modalités d'application des connaissances : **la situation suggère un calcul d'aire ou de volume (de la piscine) ou un calcul de la quantité de carreaux disponibles**

A2 introduction d'intermédiaires

A3 mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue : **cadre numérique et cadre géométrique (plan ?)**

A4 introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) : **imposée par la situation**

~~A5 utilisation de questions précédentes dans un problème~~

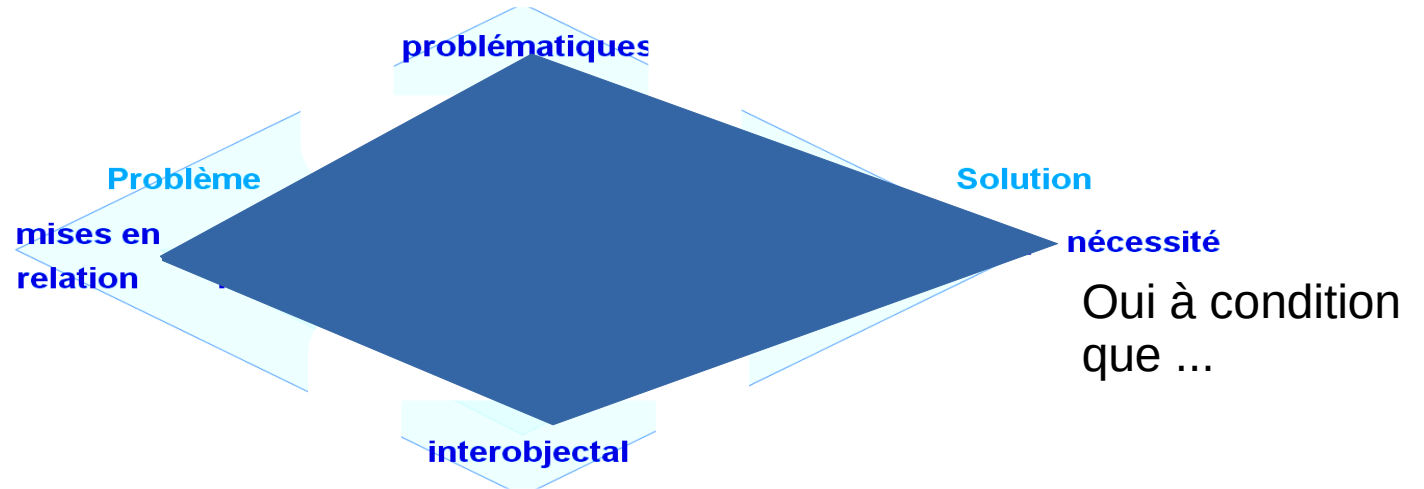
A6 existence de choix : dans l'organisation de l'utilisation des savoirs sur les fractions, les nombres décimaux, le calcul d'aire

A7 : manque de connaissances nouvelles

A minima : tentative de calcul de l'aire à carreler, représentation (plan) de la piscine

A maxima : l'organisation explicitée de calculs pour aboutir à la réponse attendue (26 m² et oui en 1 journée)

Les 4 professionnels
pourront-ils carreler la
piscine en une journée
de travail ?



Plusieurs sous-problèmes :

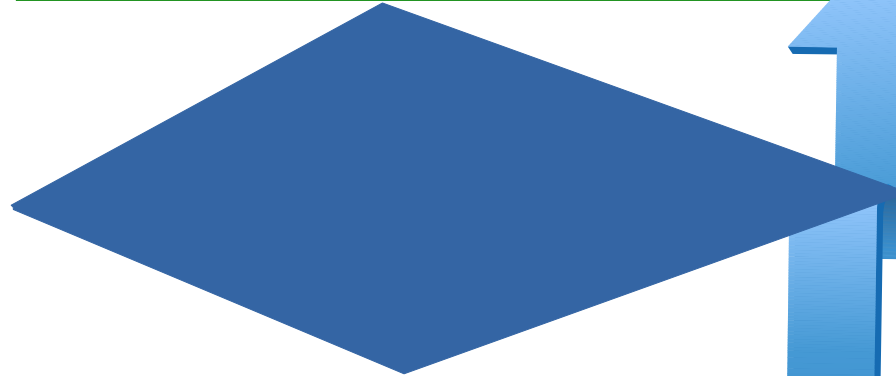
→ Combien de temps leur faut-il à eux quatre pour faire la piscine ?

→ Combien mesure la surface à carreler ?

→ Auront-ils 4 cartons pleins lorsque Pierre Dupont apportera le reste de carreaux ?

→ Devront-ils attendre Pierre Dupont pour terminer ?

- Proportionnalité
- Mesure de l'aire des faces d'un parallélépipède rectangle
- proportions
- Additionner et soustraire des fractions
- Comparer des fractions à l'unité



- REX :
- Grandeurs proportionnelles
 - Monde du travail

- Dimensions piscine
- Conditionnement des carreaux
- Quantité de carreaux disponibles
- Rythmes de travail des 4 professionnels

Pression-température

Étape 1 :

Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique.

Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Anders :

T en °C	-14	8,5	11	23,5	41	43,5	46	51
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ?
Justifiez votre réponse.

Repérage *a priori* des adaptations des connaissances des élèves : *Pression et Température*

A1 reconnaissances des modalités d'application des connaissances : **la situation suggère la mesure de grandeurs et la mobilisation de la proportionnalité**

A2 introduction d'intermédiaires : **construire un graphique, un tableau (tableur)**

A3 mélanges de plusieurs cadres et changements de points de vue : **cadre numérique, cadre de la mesure des grandeurs, cadre fonctionnel**

A4 introduction d'étapes (calculs ou raisonnements) : imposée par la situation

A5 utilisation de questions précédentes dans un problème

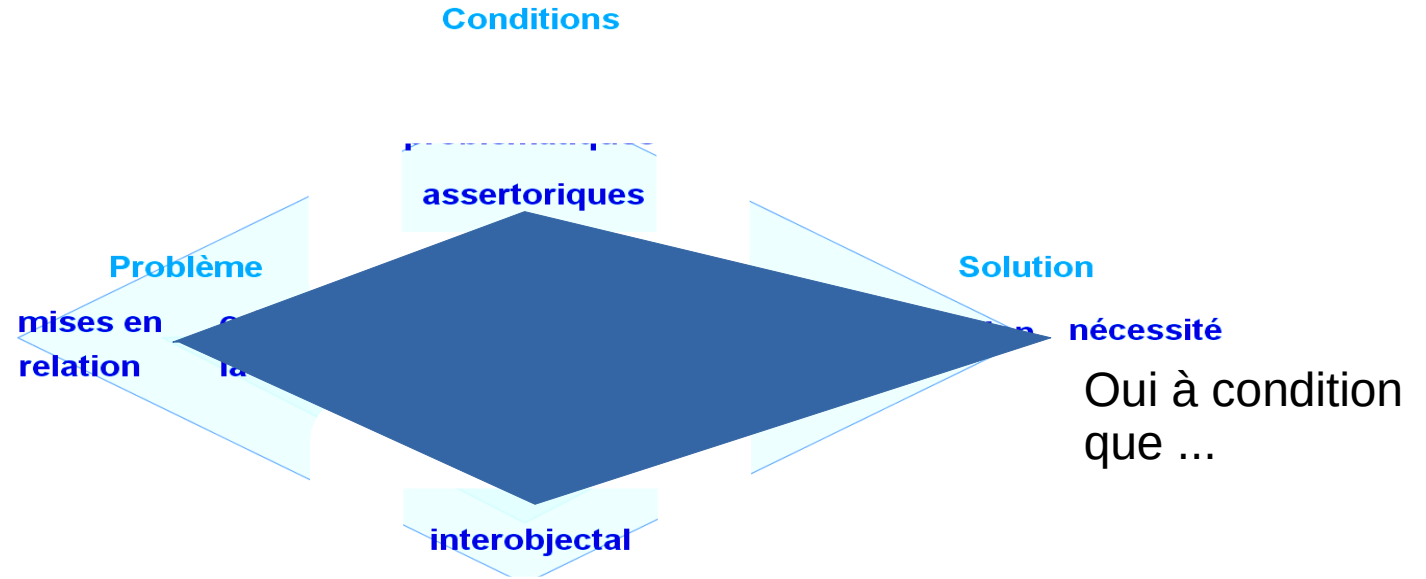
A6 existence de choix : dans la mobilisation des différents registres (tableau, graphique, calcul)

A7 : manque de connaissances nouvelles

A minima : vérification par des calculs de la proportionnalité ou non

A maxima : repérage d'une fonction affine et tentative de calcul des coefficients

La pression est-elle proportionnelle à la température ?



- Coefficient de proportionnalité
- Produit en croix
- Alignement des points avec l'origine en cas de proportionnalité
- Mesures de grandeurs
- Unités et sous-unités
- Système métrique, unités anglosaxonnes
- Expérimentations en Sciences...

La pression est-elle proportionnelle à la température ?

- Tableau de valeurs
- Unités
- Nature des grandeurs

- REX :
- Grandeurs proportionnelles
 - Mesures en sciences

REX : arithmétique

- Produit en croix
- Calcul du coefficient de proportionnalité
- Propriétés de linéarité

- Nécessite que tous les quotients calculés soient égaux.

- Calcul du coefficient

REX : mesures de grandeurs

- Alignement des points avec l'origine
- Fonction linéaire
- Proportionnalité des variations

- Nécessite les variations soient proportionnelles.

- Nécessite que les points soient alignés avec l'origine.

- Points dans un repère

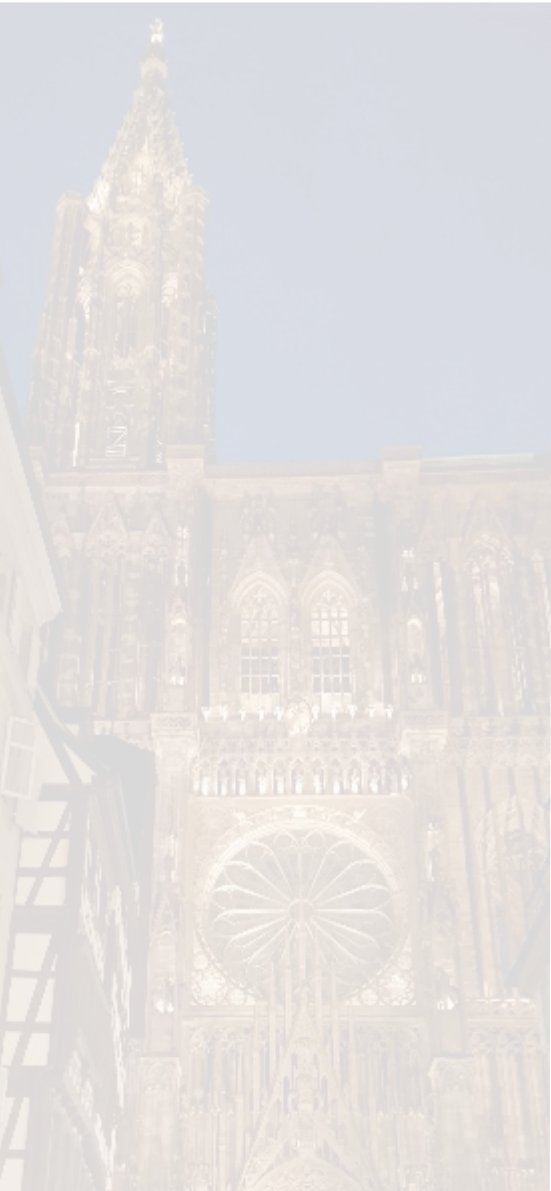
REX : analyse

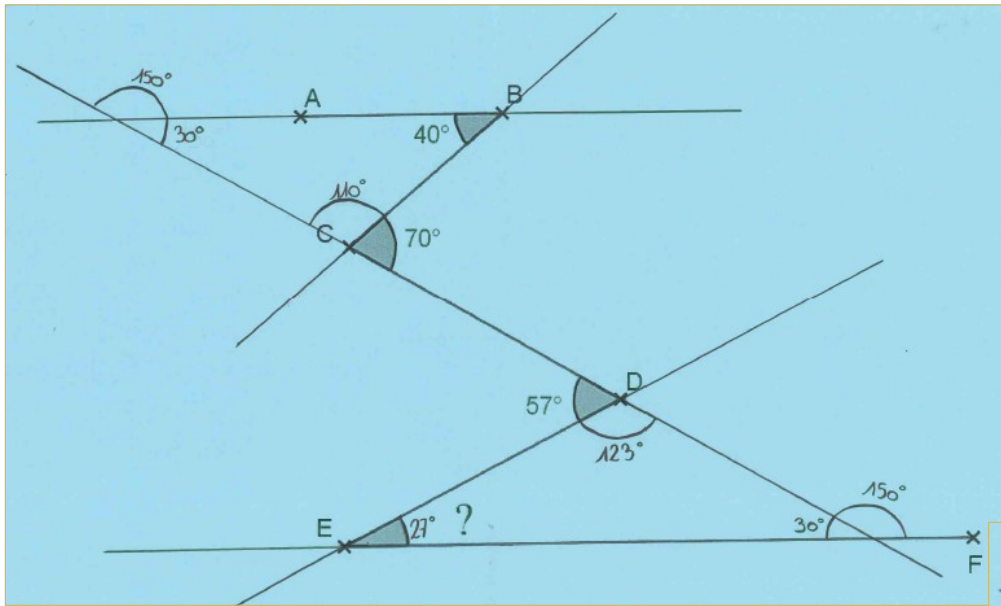
- Nécessite que le calcul corresponde à la donnée du tableau.

- Calcul des variations

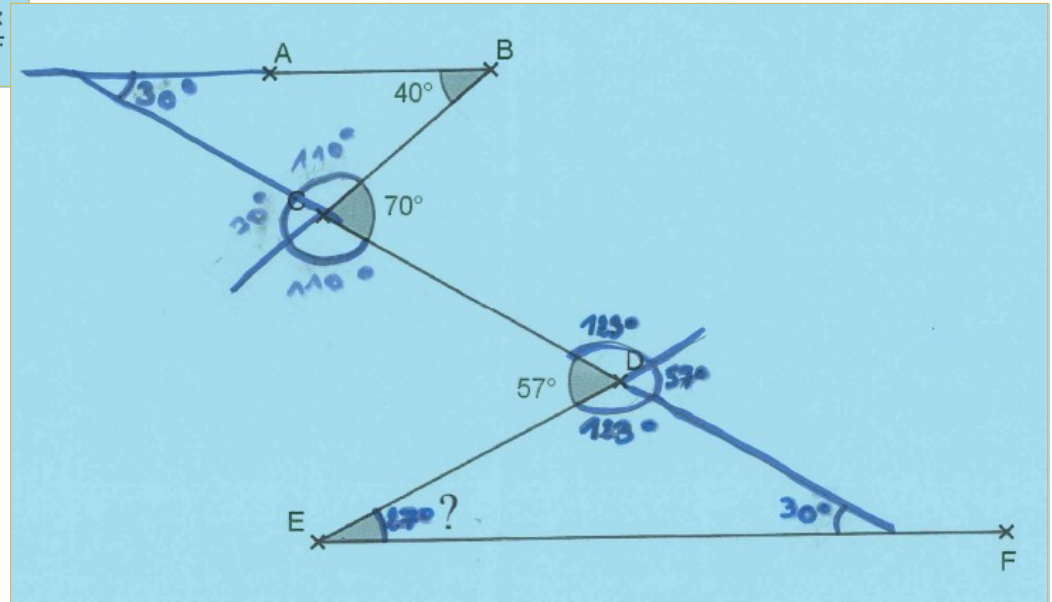
- Calcul d'une valeur du tableau

Mise en œuvre

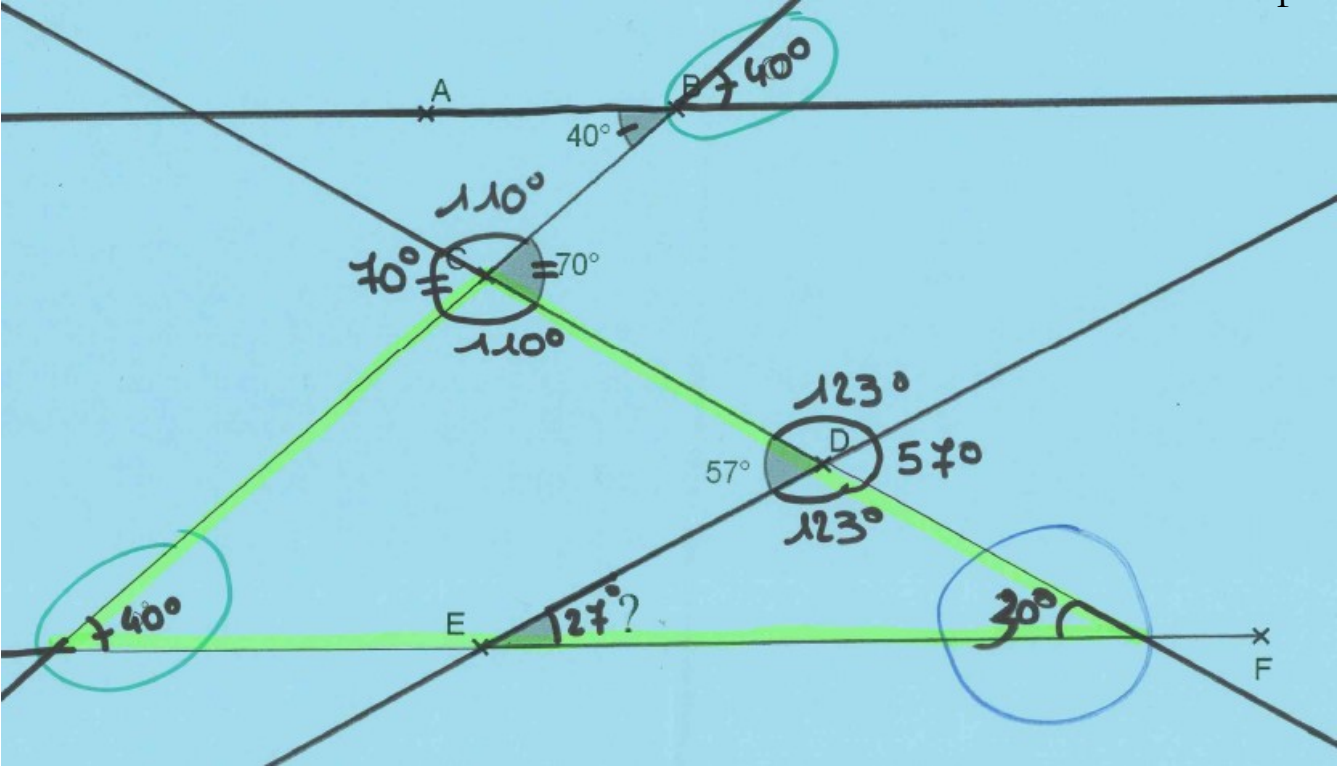


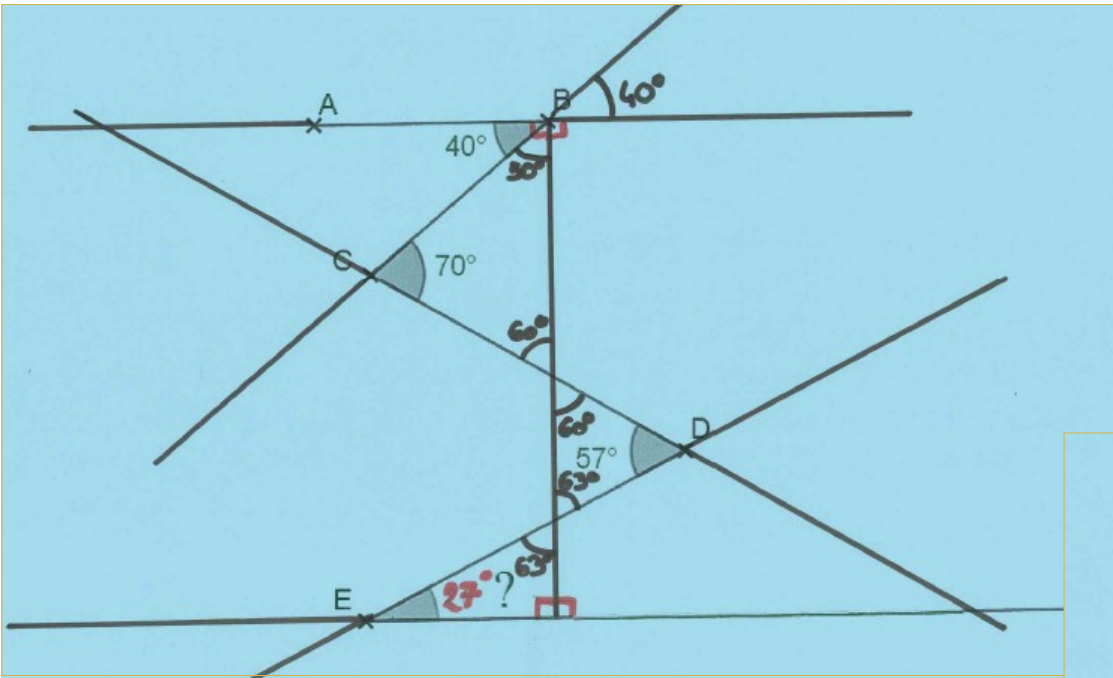


Angles alternes/internes

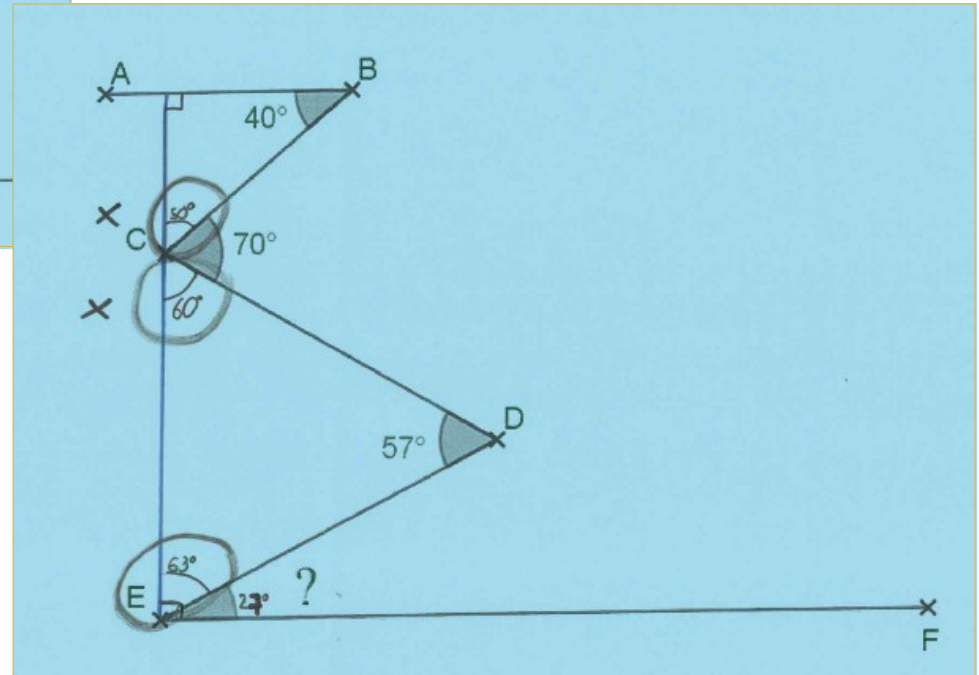


Angles
correspondants





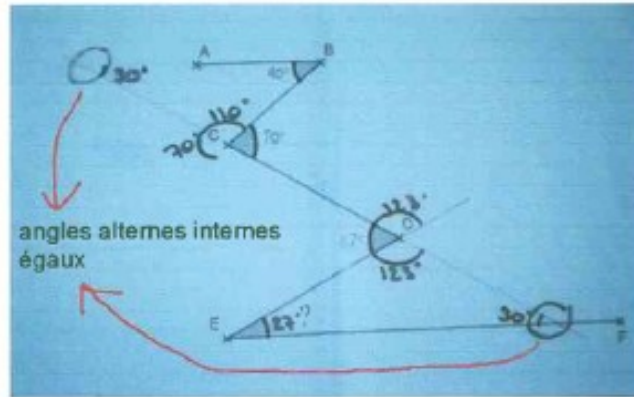
Tracé d'une droite perpendiculaire
aux deux droites parallèles



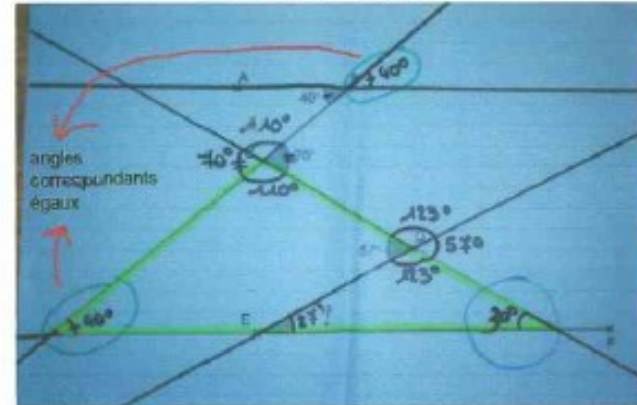
Bilan distribué lors de la séance
suivante

Bilan du problème

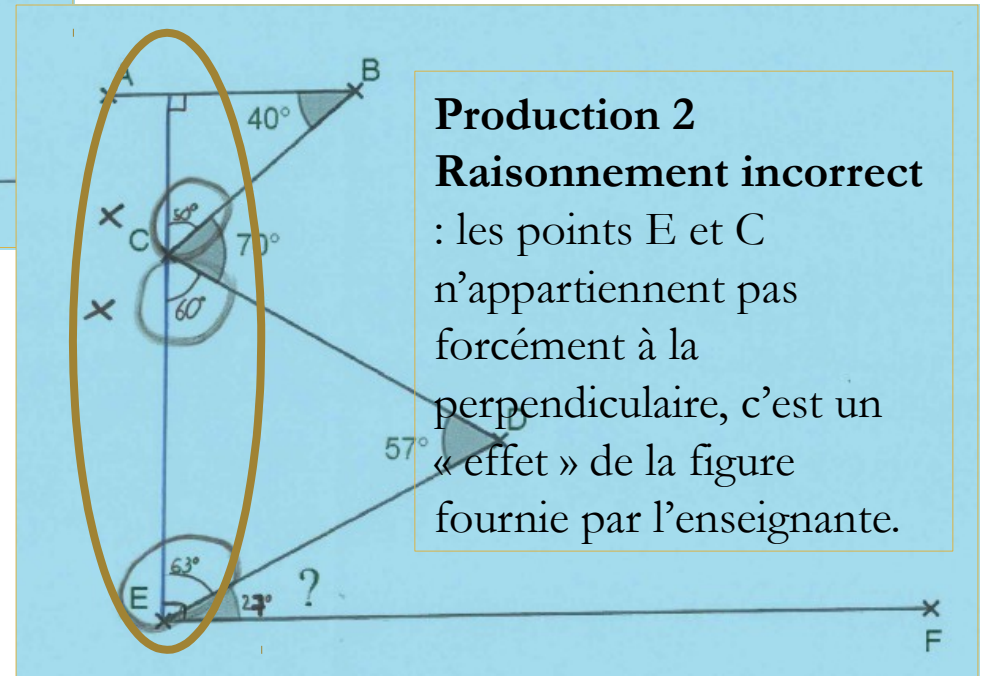
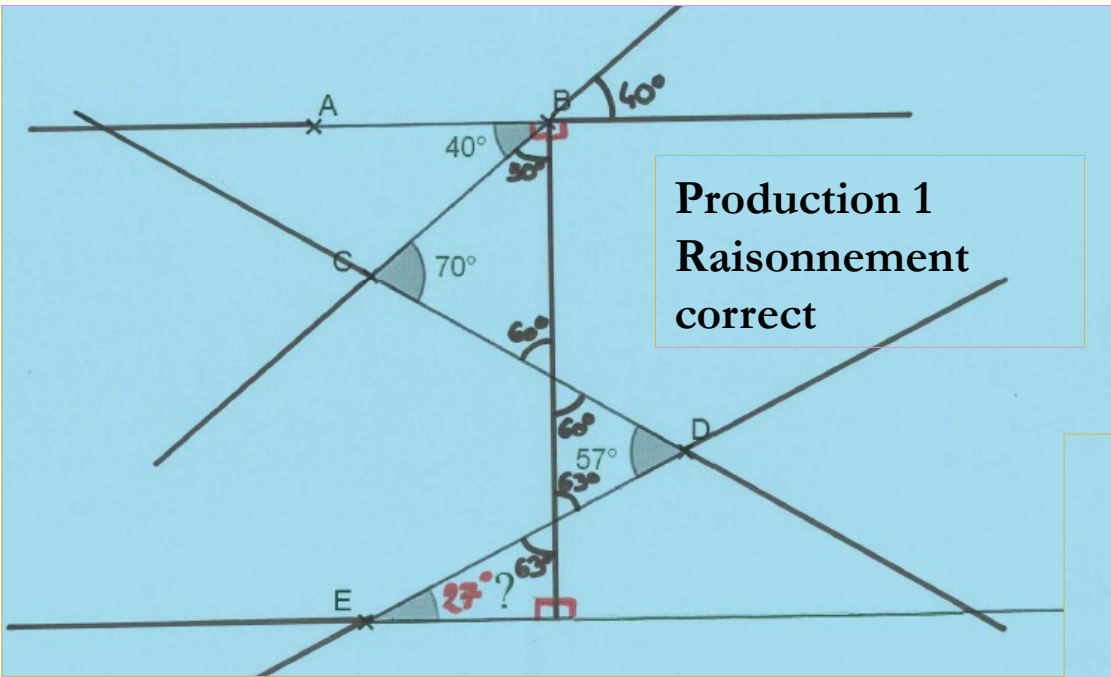
Méthode 1 proposée



Méthode 2 proposée



- On prolonge toutes les droites.
- On marque les angles que l'on peut trouver grâce à :
 - angle plat égal à 180°
 - angles opposés par le sommet égaux
 - la somme des angles dans un triangle est égale à 180°
 - angles alternes internes ou correspondants égaux quand les droites sont parallèles.

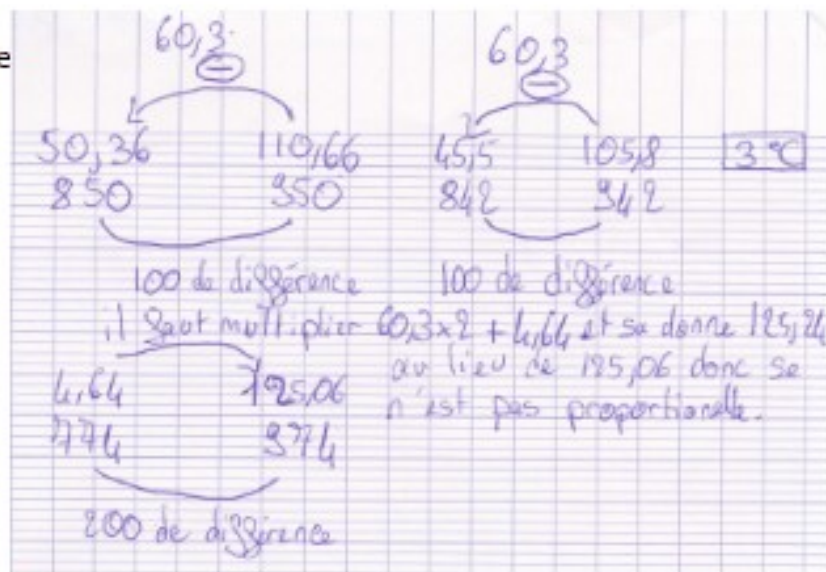


Séance 2 en 3^e :

Si on tient compte du fait qu'il s'agit d'expériences en sciences physiques et que la précision des mesures ne permet pas des calculs exacts. Peut-on dire que la pression est proportionnelle à la température ?

Pour répondre nous avons quatre méthodes :

- le calcul des quotients
- les produits en croix
- les graphiques
- les calculs du groupe D :



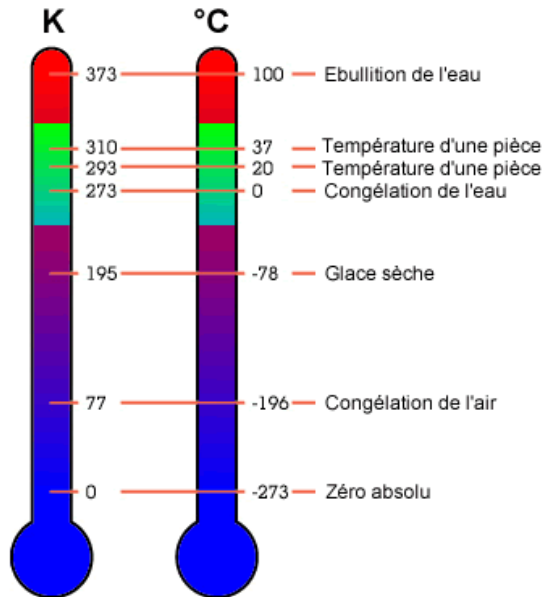
Représentez les données sur les

trois graphiques suivants et préparez une justification utilisant chacune des méthodes.

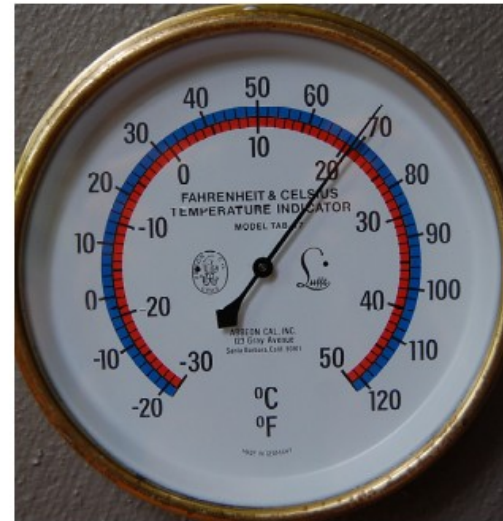
Séance 3 en 2^{nde} :

Les trois professeurs n'ont pas utilisé les mêmes unités pour mesurer la température. Ils comparent leurs résultats et cherchent une relations entre la température et la pression qui soit toujours vraie, quelle que soit l'unité de mesure de température.
Aide les à rédiger leurs conclusions.

Doc 1 : correspondance entre Kelvin et degrés Celsius



Doc 2 : thermomètre canadien à double lecture en degrés Celsius et degrés Fahrenheit



Arguments exposés par les élèves	Interprétation dans les modèles mobilisés
A1 : (Adrien) 1 degré Celsius équivaut pas à 1 degré Kelvin	Un même nombre ne mesure pas la même grandeur suivant l'unité.
A2 : (Lucie) On multiplie par je sais plus combien pour trouver en Fahrenheit	Suppose une conversion par proportionnalité d'une unité à l'autre.
A3 : (Adrien) c'est un chiffre approximatif	« chiffre » désigne le coefficient de proportionnalité. Un coefficient de proportionnalité serait un entier.
A4:(Adrien) 1 degré Kelvin est égal à... un tout petit peu moins de 3hPa	Il existe une relation entre la température en K et la pression en hPa : $1 \text{ K} \rightarrow 3 \text{ hPa}$
A5 : (Adrien) 1°F n'est pas égal à 1°K et n'est pas égal à 1°C.	Reprise de l'argument 1 pour les degrés Fahrenheit.
A6 : (Adrien) Celsius et Fahrenheit ne sont pas proportionnels entre eux.	La conversion entre les deux unités n'est pas une relation de proportionnalité.

<p>R7 : (Adrien) Si on dit que l'un n'est pas proportionnel à l'autre et ensuite on dit que Celsius et Fahrenheit n'est pas proportionnel à hectopascals</p>	<p>Transitivité de la relation de proportionnalité</p> $\forall x, y, z \in E \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz.$
<p>R7 reformulé par Aurélie</p> <p>ça c'est pas égal à ça, c'est pas égal à ça donc ça c'est pas égal à ça</p>	<p>« égalité » désigne toute relation entre deux éléments.</p>
<p>R8 : (Adrien) 1 n'est pas égal à 2 et 2 n'est pas égal à 1 et pourtant 1 est égal à 1</p>	<p>Non transitivité de l'égalité</p> $\exists x, y, z \in E \quad xRy \wedge yRz \wedge \neg(xRz).$


Critère de validation de l'écrit :

- « T'écris bien. »
- « Faut donner un coefficient de proportionnalité pour justifier de la proportionnalité. »
- orthographe et notations
- « Faut écrire plus d'une phrase. »
- « On peut écrire des formules. »

Après intervention de l'enseignant A :

- « Il faut prouver pourquoi, faut pas seulement conclure, faut redémontrer. »
- « Il faut prouver qu'on est intelligent. »

E1 Lucie	33:52	Faut juste savoir le chiffre pour pouvoir les convertir
Prof2	33:56	Par exemple c'est une idée... enfin vous voyez que ce qu'on attend c'est quelque chose qui soit toujours vrai
E1 Lucie	34:02	Si, faut trouver en fait le chiffre qui est... pour convertir qui... genre un degré Celsius est égal à
E3 Adrien	34:08	Oui mais non, on a dit, on a dit qu'il y en avait pas justement de chiffre...; comme ça. On a dit que pour
E2 Aurélie	34:13	Oui ben on peut dire qu'approximativement ben heu
E3 Adrien	34:16	Déjà ce qui est vrai c'est que si ça augmente, ça augmente et que si ça diminue, ça diminue
E1 Lucie	34:21	Ben forcément
E3 Adrien	34:23	Ben oui mais dans certains cas ça pourrait ne pas être vrai. D'où déjà on sait qu'il y a ça, tu mets si la...
E2 Aurélie	34:30	Attends tends tends tends... si
E3 Adrien	34:32	Si la température augmente, laaaa... (silence) comment dire... si la température augmente, la pression augmente et si la température baisse, la pression baisse... voilà... c'est une relation
E2 Aurélie	34:54	augmente... donc la pression augmente


 Changement d'unité
de raisonnement

Combien faut-il de m^2 de carrelage pour recouvrir la piscine?

Puis on a une piscine de 4 m de long sur 2 m de large



Le plus grand rectangle a une aire de $8m^2$ ensuite les triangles B A G C et E A D H sont identiques et ont une aire de $6m^2$ quand aux triangles I J B A et K L C D qui sont eux aussi identiques ils ont une aire de $3m^2$

Calcul:

$4 \times 2 = 8 =$ aire grand rectangle
 Aire grand rectangle
 Aire grand rectangle

$$1,5 \times 2 = 3$$

$$1,5 \times 4 = 6$$

$$3 \times 2 + 6 \times 2 + 8 = 26$$

Il y a donc 26 m^2 a cause de carrelage

Il y a t-il assez de carrelage dans 4 cartons?

Il nous faut d'abord trouver la somme de carrelage dans un carton

$26 : 4 = 6,5$
 m^2 de carrelage dans 4 cartons m^2 de carrelage dans 1 carton

Y a t-il assez de carrelage?

Combien y a t-il de m^2 de carrelage dans un carton?

$$26 : 4 = 6,5$$

m^2 de carrelage dans un carton il y a donc 6,5 m^2 de carrelage dans un carton

Il nous faut 4 cartons pleins mais en arabe déjà 3 + 1/4 et 1/4 d'un carton

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{21} \quad \frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \frac{2,1}{10,5} = \frac{2,1}{21} \quad \frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \frac{2,1}{10,5} = \frac{2,1}{21}$$

$$\frac{7}{21} + \frac{12}{21} + \frac{2,1}{21} = \frac{21,1}{21}$$

1 carton 3 cartons + 1 carton = 4 cartons

Ils ont donc assez de carrelage

pour couvrir toute la piscine

ont-ils assez de temps?

Il faut d'abord calculer quel temps en moyenne mettront-ils pour faire une piscine se-purement

Moyenne du temps qu'il faut pour faire une piscine
 $3 + 3 + 5 + 7 = 4 = 4,5$
 Mais Kevin Math Jimmy
 temps pour couvrir une piscine en fait

Si on considère qu'il y a 4 personnes à faire plus vite alors
 $4,5 : 4 = 1,125$ ils mettront donc 1,125 jours pour couvrir entièrement la piscine ce qui est trop ils ne peuvent donc pas faire à temps

Objectif: Savoir si ils sont capable de terminer une piscine en un jour

Nous savons que Marc et Vanessa creusent une piscine en trois jours chacun, Madhi creuse une piscine en cinq jours et Jeremy creuse une piscine en 7 jours

Nos calculs:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ jours} \rightarrow \frac{1}{3} \\ 3 \text{ jours} \rightarrow \frac{1}{3} \end{array} \right\} = \frac{2}{3} = \frac{70}{105}$$
$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ jours} \rightarrow \frac{1}{5} \\ 7 \text{ jours} \rightarrow \frac{1}{7} \end{array} \right\} = \frac{12}{35} = \frac{36}{105}$$
$$\left. \begin{array}{l} \frac{70}{105} \\ \frac{36}{105} \end{array} \right\} \frac{70}{105} + \frac{36}{105} = \frac{106}{105}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{35} \quad \frac{1}{7} = \frac{5}{35} \quad \frac{5}{35} + \frac{7}{35} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Une intention commune dans les trois situations : apprendre à raisonner

Des réalités différentes :

les angles : une institutionnalisation qui ne met pas en évidence les raisonnements des élèves (trace écrite)

Pression et températures : un écart entre les raisonnements des élèves à l'oral et les traces écrites. Une difficulté pour exprimer les raisonnements, les élèves n'ont pas les registres nécessaires pour expliciter leurs raisonnements

La piscine : une situation visant le développement de la compétence « raisonner » alors que seules les attitudes sont visées (et non les connaissances et les savoir-faire)

	MI	MF	MS	TBM
<p>Raisonner : Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.</p>	<p>J'accepte d'effectuer des tâches proposées au sein du groupe. Je participe à la conversation lorsqu'on me sollicite. J'écoute les autres.</p>	<p>J'accepte d'effectuer des tâches proposées au sein du groupe. Je donne mon avis lorsqu'on me sollicite. J'écoute les autres et je suis capable d'expliquer le travail effectué au sein du groupe.</p>	<p>Je coopère activement au travail de groupe. Je prends en compte le point de vue des autres élèves.</p>	<p>Je prends des initiatives. Je suis un élément moteur en animant le débat et en aidant les autres.</p>

En conclusion : quelques principes à retenir...

- Savoir analyser les situations pour savoir quels raisonnements sont attendus des élèves
- Expliciter le contrat didactique et le but de l'activité
- Expliciter le REX mobilisé
- Définir les critères de validation des productions
- Donner des outils pour formaliser (vocabulaire, signes, formalisation des raisonnements utilisés...)
- Définir des rôles dans les groupes
- Proposer des problèmes explicatifs

Mais aussi...

- Former les élèves à l'usage d'Internet : les amener à ne pas chercher uniquement la solution mais bien à poser le problème.
- Proposer régulièrement ce type de situations pour construire peu à peu une « communauté de chercheurs »

Références bibliographiques

ARSAC, G. et al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses universitaires de Lyon, IREM de Lyon.

BALACHEFF, N. (1982) Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 3 (3). 261-304.

CHOQUET, C (2019) Formation à l'analyse de l'activité des élèves en mathématiques au cycle 3 : une complémentarité de deux cadres théoriques. *Ressources pour la formation, l'Ecole et les apprentissages scolaires*. Nantes. Disponible en ligne [<https://espe.univ-nantes.fr/recherche-innovation/nos-publications--2343712.kjsp?RH=1223642640840>]

FABRE, M. et ORANGE, C. (1997) Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *Aster* 24. 37-57. INRP.

GRAU, S. (2017) Modélisation : le cas des fonctions affines. *Repères IREM* 108. 41-62.

ROBERT, A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck, F. (Dir.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès édition.