Déclic Terminale S Edition 2012

- Extrait des 5 pages "logique" à la fin du manuel

Par l'absurde

Au lieu de prouver $p \Rightarrow q$, on peut prouver que la conjonction p et non (q) conduit à une contradiction.

EXEMPLE : On veut prouver l'ensemble I des nombres rationnels strictement supérieurs à 1 n' a pas de plus petit élément. On suppose l'existence d'un tel nombre rationnel qu'on nomme a. On construit alors le rationnel $b = \dfrac{1+a}{2}$. On a bien $b > 1$, donc $b \in I$, mais b est clairement plus petit que a, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « a est le plus petit élément de I ».
La preuve à produire est $I = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 1\} \Rightarrow I$ *n'a pas de plus petit élément*.
On a montré que $(I = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 1\})$ *et (I a un plus petit élément)* conduit à une contradiction.

- Page 22 Rubrique Cours

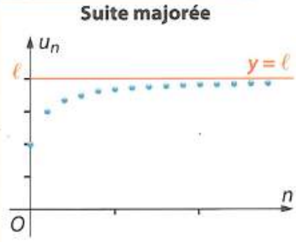
b Cas des suites monotones et convergentes

Théorème Soit une suite u convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite u est croissante, alors la suite **u est majorée par ℓ**, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \leqslant \ell}$.

DÉMONSTRATION démo BAC
On raisonne par l'absurde :
on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$.
Comme la suite u est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell < u_{n_0} \leqslant u_n$ (1).
L'intervalle $]\ell - 1 ; u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ.
Comme la suite u converge vers ℓ, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]\ell - 1 ; u_{n_0}[$.
Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n < u_{n_0}$ (2).
Alors, pour tout entier $n \geqslant \max(N ; n_0)$, on a : $u_{n_0} \leqslant u_n$ et $u_n < u_{n_0}$. On aboutit à une contradiction, et l'hypothèse initiale est donc fausse.
On en déduit que pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.

Représentation graphique

Suite majorée



Les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont sous la droite d'équation $y = \ell$.

Voir la fiche **Logique et raisonnement mathématique**.

- Page 33 Rubrique Exercices

46 Démonstration du cours : unicité de la limite Voir le cours, page 18.

Soient une suite u et deux réels ℓ et ℓ' tels que $\ell < \ell'$.
On suppose que la suite u converge vers ℓ et ℓ'.
On considère un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$.

1 Pourquoi, à partir d'un rang p, tous les termes u_n sont-ils dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$?

2 En opérant de même avec ℓ', montrer que l'on aboutit à une contradiction. Que peut-on en conclure ?

● Page 270 Rubrique Travail personnel - Exercices résolus

Travail personnel : exercices résolus

16 BAC Section d'un tétraèdre en utilisant le théorème « du toit »

Partie A – ROC

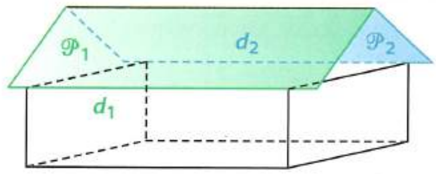
On rappelle les propriétés ci-dessous :

❶ Soit $\mathcal{P}$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

❷ Si deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite.

Démontrer la propriété suivante : Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant deux droites parallèles (d_1) et (d_2) sont sécants, alors leur intersection est une parallèle commune à (d_1) et (d_2).



Le faîte du toit est parallèle au bord soutenu par les mu

Partie B – Application

On considère un tétraèdre $ABCD$, et les milieux I, J (des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[CD]$. Déterminer la sect du tétraèdre par le plan (IJK) et préciser sa nature.

Solution

Partie A Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur des droites (d_1) et (d_2).

D'après la propriété ❷, l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite (d).

Soit A un point de (d) : c'est aussi un point des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Le plan $\mathcal{P}_1$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{w}$, où $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathcal{P}_1$ non colinéaire à $\vec{w}$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\overrightarrow{AM} = x'\vec{v} + y'\vec{w}$, où $\vec{v}$ est un vecteur de $\mathcal{P}_2$ non colinéaire à $\vec{w}$.

Soit M un point de (d) : l'appartenance de M à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$ assure l'existence de quatre réels x, y, x', y' tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{w} = x'\vec{v} + y'\vec{w}$.

Si $x \neq 0$, on a : $\vec{u} = \dfrac{x'}{x}\vec{v} + \dfrac{y'-y}{x}\vec{w}$, et, par suite, $\vec{u}$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}_2$.

$\mathcal{P}_2$ possèdent alors deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{w}$ du plan $\mathcal{P}_1$: $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc parallèles. Or, c'est faux, ils sont sécants par hypothèse.

Donc $x = 0$, par conséquent $\overrightarrow{AM} = y\vec{w}$, ce qui prouve que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{w}$, et par suite, parallèle à (d_1) et à (d_2).

Partie B – Application

La droite (IJ), droite des milieux dans le triangle ABC, est parallèle à la droite (BC). Les plans (BCD) et (IJK) contiennent donc deux droites parallèles à (BC) et sont sécants puisque le point K leur est commun : leur intersection est donc une droite parallèle à (BC) et à (IJ). Ainsi, la trace du plan (IJK) sur la face BCD est la parallèle à (BC) passant par K. Elle coupe le segment $[BD]$ en son milieu L.

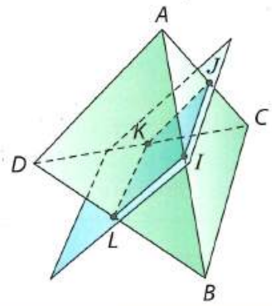
La section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (IJK) est donc le parallélogramme $IJKL$, puisque $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{LK}$.

Stratégies

1 On caractérise les plans et les droites grâce à une relation vectorielle faisant intervenir leui vecteurs directeurs.

2 Tout couple de deux vecteurs non colinéaires d'un plan est un couple de vecteurs directeurs de ce plan, et le premier vecteur pe être choisi arbitrairement : ici on prend un vecteur commun à $\mathcal{P}_1$ $\mathcal{P}_2$: $\vec{w}$.

3 Deux plans sont parallèles si, seulement si, deux vecteurs non colinéaires de l'un dirigent l'autr



Indice Seconde Edition 2017

- Page 348 Rubrique Ensembles - Raisonnement

III. Raisonnement par l'absurde

Montrer qu'une proposition P est *vraie* en **raisonnant par l'absurde** consiste à supposer que P *est fausse* et à montrer qu'avec cette hypothèse, on aboutit à une contradiction.

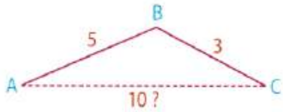
EXEMPLE

Pour montrer que : « il n'existe pas de triangle ABC tel que AB = 5, BC = 3 et AC = 10 », on peut faire un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'un tel triangle existe.

D'après l'inégalité triangulaire : $AC \leqslant AB + BC$. On a donc $AC \leqslant 5 + 3$ et par conséquent $AC \leqslant 8$. On aboutit à une contradiction puisque AC = 10.

On en déduit qu'il n'existe pas de triangle tel que AB = 5, BC = 3 et AC = 10.

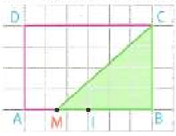


- Page 43 Rubrique Les savoir-faire du cours

SAVOIR-FAIRE 2 Identifier la variable et l'ensemble de définition **Logique** **TICE**

Voir l'exercice 40, p. 50

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 6 et BC = 4 ; I est le milieu de [AB] et M est un point qui décrit le segment [AI] privé de A.



1. Exprimer l'aire du triangle rectangle MBC en fonction de MB.
2. On note x la longueur AM.
   a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que x ne peut pas être égal à 4.
   b. À quel intervalle appartient x ?
3. La fonction f associe au réel x l'aire du triangle MBC. Donner l'expression de $f(x)$ et son ensemble de définition.

Fichier logiciel
www.bordas-indice.fr

Conseil
Quand un point M décrit un segment, imaginer plusieurs positions de ce point peut aider à répondre à la question posée (voir fichier).

Solution commentée

1. L'aire du triangle MBC est égale à $\frac{4 \times MB}{2} = 2MB$.

2. a. On raisonne par l'absurde. Si $x = 4$, alors AM = 4.
Puisque I est le milieu de [AB], on a : $AI = \frac{1}{2}AB = 3$.
Par conséquent, AM > AI, donc le point M n'appartient pas au segment [AI], ce qui est contradictoire avec la construction de M. Ainsi, x ne peut pas être égal à 4.
b. Le point M appartient au segment [AI] privé de A et AI = 3, donc la variable x appartient à l'intervalle]0 ; 3].

3. En posant $AM = x$, on a $MB = 6 - x$, donc l'aire du triangle MBC est égale à $2(6 - x)$.
Ainsi : $f(x) = 12 - 2x$.
D'après la question 2. b., l'ensemble de définition de f est l'intervalle]0 ; 3].

● Page 114 Rubrique Cours

1 Fonction carré

Définition et premières propriétés

Vocabulaire
Pour tout réel a, on a $f(-a) = f(a)$. On dit que la fonction carré est paire.

Logique
Pour prouver qu'un énoncé est faux, on peut supposer qu'il est vrai, puis aboutir à une contradiction. Ce type de raisonnement est appelé **raisonnement par l'absurde.**

Définition La fonction f telle que $f(x) = x^2$ est appelée **fonction carré** : elle est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction carré est celle qui, à tout nombre réel x, associe son carré x^2.

Exemples
- $f(2) = 2^2 = 4$ donc l'image de 2 par la fonction carré est 4.
- $f(-3) = (-3)^2 = 9$ donc l'image de -3 par la fonction carré est 9.

Remarque : la fonction carré n'est pas linéaire.

Logique
Pour prouver que la fonction carré n'est pas linéaire, on effectue un raisonnement par l'absurde. Soit f la fonction carré ; supposons que f soit linéaire : il existe alors un nombre réel k tel que $f(x) = kx$. Donc $f(1) = k \times 1$ et $f(2) = k \times 2$. Or, on sait que le carré de 1 est égal à 1, c'est-à-dire $f(1) = 1$: k est donc égal à 1 d'où $f(2) = 2$, ce qui est absurde car $f(2) = 4$.

Propriété La fonction carré est **croissante** sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et **décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.
Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Exemple : la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Sachant que $1{,}3 < 2{,}1$, on en déduit que $1{,}3^2 < 2{,}1^2$.

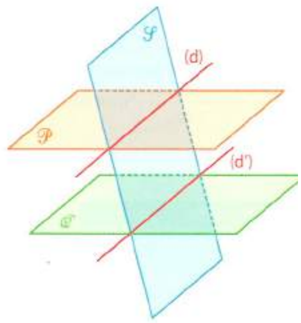
● Page 316 Rubrique Cours

Parallélisme de droites

À noter
Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre elles.

Logique
Dans cette démonstration, on utilise deux raisonnements par l'absurde.

Propriétés **(1)** Si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles à une même droite (d_3), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles entre elles.
(2) Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont strictement parallèles, alors tout plan $\mathscr{S}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}$, coupe le plan $\mathscr{Q}$ et les droites d'intersections sont parallèles.



Démonstration de la propriété (2)

On suppose que $\mathscr{S}$ ne coupe pas $\mathscr{Q}$. $\mathscr{S}$ est alors parallèle à $\mathscr{Q}$. Soit A un des points d'intersection de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$. Il existe donc deux plans distincts passant par A et parallèles à $\mathscr{Q}$, ce qui est absurde. Les plans $\mathscr{S}$ et $\mathscr{Q}$ sont donc sécants selon une droite (d').
La droite (d) d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{S}$ et la droite (d') sont coplanaires dans le plan $\mathscr{S}$.
Si elles étaient sécantes en un point B, ce point appartiendrait à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, ce qui est impossible puisque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont strictement parallèles, donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

Logique
Un **raisonnement par l'absurde** consiste à démontrer une proposition en prouvant que la proposition contraire conduit à une absurdité.

Odyssée Seconde Edition 2014

b. Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à émettre comme hypothèse le contraire du résultat escompté. Si cela conduit à un résultat absurde (ou faux) alors on aura démontré que le résultat attendu était juste.

EXEMPLE

S'il existe un nombre réel x solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ alors $x^2 = -1$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif.
Donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

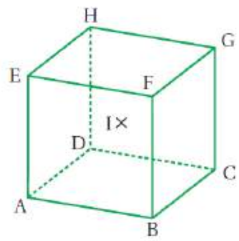
- Page 243-244 Rubrique Savoir-faire

Savoir-faire 2 *Extraire une figure plane*

ÉNONCÉ

ABCDEFGH est un cube de côté 5 cm.
I est le milieu de [HB].

a. Donner la longueur de la diagonale d'une face du cube.
b. Dessiner en vraie grandeur le quadrilatère BCHE et le triangle ACH.
c. Le point I appartient-il aux plans de ces deux polygones ? Justifier.



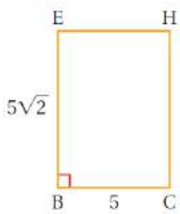
SOLUTION

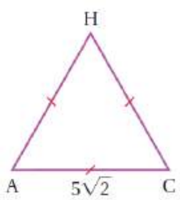
a. La diagonale d'une face du cube de côté 5 mesure $5\sqrt{2}$ cm car la face est un carré.

MÉTHODE

a. Chaque face est un carré, donc les diagonales mesurent $\sqrt{2}$ fois la longueur du côté (ce résultat se retrouve en appliquant le théorème de Pythagore).

b. On admet que le quadrilatère BCHE est un rectangle de dimensions 5 cm et $5\sqrt{2}$ cm.
Le triangle ACH est équilatéral de côté $5\sqrt{2}$ cm.





b. On admet que si l'arête [BC] est perpendiculaire à la face ABFE, alors elle est perpendiculaire à la droite (BE).

c. Le point I est le milieu de [HB], donc il est dans le même plan que le rectangle BCHE.
En revanche, si I était dans le plan du triangle ACH, alors toute la droite (HI) serait dans ce plan et donc le point B aussi car $B \in [HI]$. Or A, B et C sont dans la face du dessous mais pas H, donc ces points ne peuvent être dans un même plan.
On a donc une contradiction. On en déduit que le point I n'est pas dans un même plan que le triangle ACH.

c. Pour montrer qu'un point appartient à un plan, on peut montrer qu'il appartient à une droite de ce plan.
Pour montrer qu'un point n'appartient pas à un plan, on peut raisonner par l'absurde*.

* R Voir p. 10.

Math'x Seconde Edition 2014

- Page 350 Rubrique raisonnement logique

Raisonnement par l'absurde

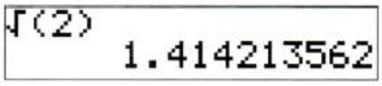
Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'elle ne peut pas être fausse. On suppose donc que sa négation est vraie et on montre que c'est impossible !

Énoncé : Démontrer $\sqrt{2} \neq 1{,}414\,213\,562$.

Démonstration : Supposons que $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$.

Alors $\sqrt{2}^2 = 1{,}414\,213\,562^2$. Or $\sqrt{2}^2 = 2$ et $1{,}414\,213\,562^2$ a pour dernier chiffre 4. On arrive à une contradiction.

Il est donc impossible que $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562$ (ce n'est qu'une valeur approchée).



- Page 331 Rubrique Exercices

85 Raisonner par l'absurde

Soit A, B, C et D distincts tels que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

1. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

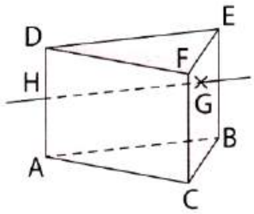
2. Justifier que (BC) et (AD) sont sécantes.

Aide : on pourra supposer que (BC) et (AD) sont parallèles et montrer que l'on aboutit à une contradiction.

Hyperbole Seconde Edition 2014

61 Raisonnement par l'absurde

ABCDEF est un prisme droit. H est un point de l'arête [AD]. G est un point du plan (BCE) sans appartenir aux droites (BC), (CF), (FE), (BE).



a) On suppose que les droites (AB) et (HG) sont parallèles.

Démontrer que l'on arrive à une contradiction.

b) Que peut-on en déduire ?

Repères Première S Edition 2011

- Page 186 Rubrique et notations

logique et notations

La démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une propriété (ou un résultat) est vraie on peut utiliser un **raisonnement par l'absurde.**

Étape 1 - On suppose que le résultat que l'on veut démontrer est faux (c'est-à-dire que le contraire est vrai).

Étape 2 - On utilise cette hypothèse : on effectue un raisonnement ou un calcul. On aboutit à **une absurdité.**

Étape 3 - On conclut : La propriété est **vraie.**

Principe : L'hypothèse faite à l'étape 2 conduit à une absurdité (une contradiction ou une impossibilité) donc cette hypothèse est **fausse.**

Exemples

Application concrète :

Mon professeur nous a dit qu'il ferait peut-être un contrôle lundi.
Malheureusement j'ai été malade ce jour-là et n'ai pas pu aller en cours.
En revenant mardi mes camarades m'ont dit ne pas avoir eu le contrôle.
Montrer que le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.

Application mathématique :

Montrer que pour tout $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

Application concrète	Méthode	Application mathématique
Le professeur a fait son contrôle lundi.	On suppose que la conclusion est fausse.	Il existe un réel $x \neq -5$ tel que $\frac{2x-1}{x+5} = 2$.
Alors mes camarades me diraient l'avoir fait, ce qui est contradictoire.	On obtient une absurdité.	Alors $2x - 1 = 2(x + 5)$ soit $2x - 1 = 2x + 10$ d'où $-1 = 10$ ce qui est impossible.
Le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.	On conclut.	Pour tout un réel $x \neq -5$ on a $\frac{2x-1}{x+5} \neq 2$.

→ À vous de jouer

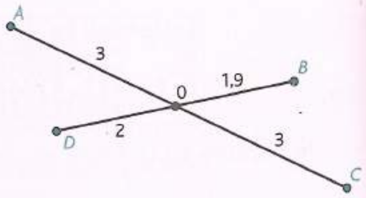
1. a) En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée de $\frac{941\,664}{665\,857}$ et de $\frac{1\,414\,213\,562}{10^9}$.

b) En utilisant une raisonnement par l'absurde, démontrer que $\frac{941\,664}{665\,857} \neq \frac{1\,414\,213\,562}{10^9}$.

2. a) Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que si n^2 est pair alors n est pair.

c) Énoncer l'équivalence démontrée.



3. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Pour cela, on utilisera une démonstration par l'absurde en partant de l'hypothèse : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q ($q \neq 0$) sont premiers entre eux, et on s'aidera du résultat de l'exercice **2.**

4. En utilisant la figure ci-contre, dire si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Page 164 Rubrique Exercices

42. Soit x un réel positif. On considère la série statistique :

2 - 6 - 18 - 2x.

1. Soit $m(x)$ la moyenne de cette série statistique. Exprimer $m(x)$ en fonction de x.
2. Soit $\sigma(x)$ l'écart type de cette série statistique. Exprimer $\sigma(x)$ en fonction de x.
3. Montrer qu'il n'existe pas de valeur positive de x telle que la moyenne et l'écart type de cette série statistique soient égales.

INDICATION

On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

- Page 106 Rubrique Exercices

106. Soit a et b deux réels non nuls, tous les deux.

1. Montrer que :

$$-1 \leqslant \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1.$$

MÉTHODE

On pourra raisonner par l'absurde.

2. À quoi peut-on alors associer le nombre réel :

$$r(a, b) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \ ?$$

3. Soit $x \in [\pi ; 2\pi]$ tel que $\cos x = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

a. Déterminer $\sin x$.

b. Peut-on être plus précis, si l'on sait que $ab < 0$?

Repères Terminale S Edition 2012

6. Raisonnement par l'absurde

Il est parfois difficile de démontrer une affirmation en distinguant tous les cas possibles, et, dans certains cas il peut s'avérer judicieux de démontrer l'absurdité du contraire.
Cette démarche s'appelle le **raisonnement par l'absurde** :
- on suppose le contraire d'une propriété,
- on démontre que tout raisonnement fondé sur cette supposition **aboutit au moins à un cas absurde,**
- on en déduit que la proposition contraire est absurde et donc que la **propriété est vérifiée.**

Application I : Montrer que trois points définissent un plan

Pour démontrer que trois points A, B et C définissent un plan, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. En raisonnant par l'absurde, on suppose que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On prend par exemple les points $A(1;5;3)$, $B(2;7;4)$ et $C(3;8;2)$.

On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\7-5\\4-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\8-5\\2-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires et donc qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Dans ce cas, on a $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1=-2k\\2=3k\\1=-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\k=\frac{2}{3}\\k=-1\end{cases}$.

Ce raisonnement fournit plusieurs valeurs de k, ce qui est impossible.

k ne peut être égal en même temps à -1 et $-\frac{1}{2}$, c'est absurde. Donc k n'existe pas.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont alors pas colinéaires, il s'ensuit que les points A, B et C définissent un seul plan.

Application II : Montrer la proposition donnée

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors il existe un **unique** triplet de réels x, y et z tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
On admet l'existence, on veut démontrer l'unicité de l'écriture $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe au moins deux triplets de réels (x, y, z) et (x', y', z') tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{u}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.
On peut donc écrire l'égalité : $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$
$\Leftrightarrow (x-x')\vec{i}+(y-y')\vec{j}+(z-z')\vec{k}=\vec{0}$.
Et en posant $\alpha=x-x'$, $\beta=y-y'$ et $\gamma=z-z'$, on trouve trois réels α, β et γ tels que $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}=\vec{0}$.
Ce qui signifie que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs coplanaires, ce qui est impossible (car $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont supposés trois vecteurs non coplanaires).
On en déduit donc que s'il existe un triplet de réel x, y et z tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ alors ce triplet est unique.

→ À vous de jouer

1 Démontrer par l'absurde que la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1}=q\times U_n$ (q un réel non nul) et $U_0=\frac{1}{2}$, n'est jamais nulle.

2 Démontrer par l'absurde que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant 1$.

3 Démontrer par l'absurde que sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $\frac{x+2}{x+3}$ est différent de 1.

4 Démontrer par l'absurde que sur $\mathbb{R}^*$, $\frac{\sqrt{4x^2+6}}{x}$ est différent de 2.

● Page 18 Rubrique Démonstrations

Théorème

Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite croissante.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à l.

Démonstration (par l'absurde)

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et qu'il existe un terme u_p strictement supérieur à l.

Puisque la suite (u_n) est croissante, on en déduit que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

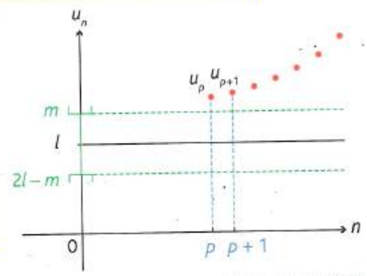
Choisissons alors m un nombre réel tel que :

$l < m < u_p$, et posons $\mathrm{I} =]2l - m\,;\, m[$ un intervalle centré en l.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors I doit contenir tous les u_n à partir d'un certain rang. Ce qui est **absurde** puisqu'à partir du rang p, $u_n \notin \mathrm{I}$ car $u_n > m$. L'intervalle I ne peut donc contenir une infinité de termes u_n à partir d'aucun rang.

Donc **tous les termes de la suite (u_n) sont bien inférieurs ou égaux à l.**

Supposer que la propriété « tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à l » est fausse revient à supposer que les (u_n) ne sont pas tous inférieurs ou égaux à l. Ce qui revient à dire qu'il existe au moins un u_n tel que $u_n > l$.



● Page 19 Rubrique Démonstrations

Théorème

Soit $q \in \mathbb{R}$. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration (par l'absurde)

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Alors :

$$q = 1 + x, \qquad \text{avec } x > 0.$$

On sait alors, grâce à l'inégalité de Bernoulli que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{pour tout } x > 0,\ (1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nx = +\infty$.

On a donc :

- à partir du rang 0, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + nx) = +\infty$.

D'après un précédent théorème, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + x)^n = +\infty.$$

Attention !

On utilise **l'inégalité de Bernoull** dans cette démonstration. Elle a été démontrée (par récurrence) p. 11 du cours.

Attention !

On utilise le théorème :

soit (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant les deux conditions

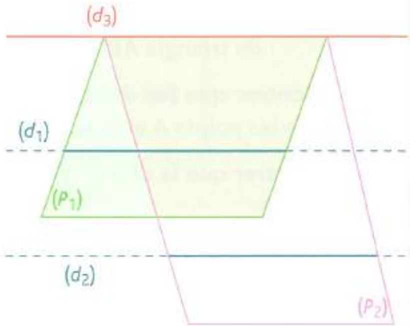
- à partir d'un certain rang : $v_n \geqslant u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;
- alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

● Page 302 Rubrique Travail en autonomie

travail en autonomie

Exercice résolu 3 • Démontrer le parallélisme dans le théorème du toit

énoncé **On rappelle le théorème du toit :**
Si (P_1) et (P_2) sont deux plans sécants contenant deux droites parallèles (d_1) et (d_2), alors l'intersection de (P_1) et (P_2) est une droite (d_3) parallèle à (d_1) et (d_2).

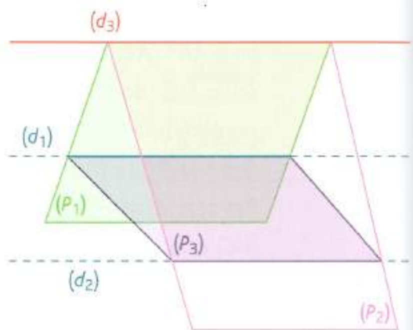


On souhaite démontrer ce théorème.

1. **Avec les hypothèses du théorème, démontrer qu'il existe un plan que l'on notera (P_3) contenant (d_1) et (d_2), puis déterminer les ensembles suivants $(P_1) \cap (P_3)$ et $(P_2) \cap (P_3)$.**
2. **Supposons que les droites (d_1) et (d_3) sont sécantes, démontrer alors que les droites (d_2) et (d_3) sont sécantes.**
3. **En utilisant la contraposée du 2., démontrer le théorème du toit.**

solution

1. Les droites (d_1) et (d_2) étant parallèles, elles sont coplanaires. Soit (P_3) le plan les contenant toutes les deux :
$$(P_1) \cap (P_3) = (d_1) \quad \text{et} \quad (P_2) \cap (P_3) = (d_2).$$



2. Si (d_1) et (d_3) sont sécantes au point A, puisque $(d_3) = (P_1) \cap (P_2)$, alors le point A appartient à (P_2) et puisque $(d_1) = (P_1) \cap (P_3)$, alors le point A appartient aussi à (P_3).
Donc le point A appartient au plan (P_2) et au plan (P_3), d'où A est aussi un point de $(P_2) \cap (P_3) = (d_2)$.
On vient de montrer que :
si (d_1) et (d_3) sont sécantes en A, alors (d_2) et (d_3) sont sécantes en A et alors (d_1) et (d_2) sont sécantes en A.

3. **MÉTHODE**
On utilise la méthode de la contraposée (voir la fiche logique en fin de manuel) :
si P et Q sont deux propositions, alors $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{Non } Q \Rightarrow \text{Non } P)$.

Si P est la proposition « (d_2) est parallèle à (d_3) » et si Q est la proposition « (d_1) est parallèle à (d_3) »,
on vient de démontrer que :
« (d_1) sécante à (d_3) » implique « (d_1) sécante à (d_2) »,
ce qui est équivalent à :
« (d_1) non sécante à (d_2) » implique « (d_1) non sécante à (d_3) ».
On sait que (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc les droites (d_1) et (d_3) sont non sécantes et puisqu'elles sont dans le même plan alors elles sont parallèles. De même, puisque (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors (d_2) et (d_3) le sont également.