Le raisonnement par l'absurde

D.Gardes - ML.Gardes

Irem de Dijon - Irem de Lyon

17 juin 2019

Objectifs de l'atelier

- présenter une recherche en cours, inter-IREM, sur le raisonnement par l'absurde (RpA)
- vous proposer de réfléchir sur le RpA et son enseignement

Déroulé de l'atelier :

- **Temps 1** : présentation du raisonnement par l'absurde
- **Temps 2** : analyse en groupe d'extraits de manuels
- **Temps 3** : synthèse des analyses précédentes après remixage des groupes
- **Temps 4** : réflexion sur des points de vigilance dans les groupes d'origine
- **Temps 5** : synthèse de l'atelier

Dans le programme de la classe de Seconde

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;
- formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

Temps 1 - Présentation du RpA

Le raisonnement par l'absurde repose sur :

- le principe du tiers exclu
- le principe de non-contradiction

Temps 1 - Présentation du RpA

Le raisonnement par l'absurde repose sur :

- le principe du tiers exclu
- le principe de non-contradiction

Pour démontrer qu'une proposition A est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que sa négation non(A) est fausse.

Le raisonnement par l'absurde repose sur :

- le principe du tiers exclu
- le principe de non-contradiction

Pour démontrer qu'une proposition A est vraie, un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer que sa négation non(A) est fausse.

Cas 1

$(\text{non}(A) \Longrightarrow C)$ et non (C) où C est une proposition

Cas 2

$\text{non}(A) \Longrightarrow (C \text{ et } \text{non}(C))$ où C est une proposition

Exemple du cas 1 : 0 n'a pas d'inverse.

On suppose que 0 a un inverse dans $\mathbb{R}$. On le note a.
Par définition de l'inverse, $0 \times a = 1$.
Or pour tout réel x, $0 \times x = 0$. On en déduit que $0 = 1$.

On a : A est la proposition "0 n'a pas d'inverse" et C la proposition "0=1"

Exemple du cas 2 : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe p et q deux entiers tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et p et q étant premiers entre eux.
On a alors $p^2 = 2q^2$, p^2 est donc divisible par 2 (pair), et par suite p est pair. Il existe r entier tel que $p = 2r$. D'où $q^2 = 2r^2$, ce qui implique que q est pair. On a alors p et q pairs. Ainsi p et q ne sont pas premiers entre eux.

On a : A est la proposition "$\sqrt{2}$ est irrationnel" et C la proposition "p et q premiers entre eux"

Cas particulier où la proposition est une **implication**.

La proposition A est : $P \Longrightarrow Q$.

On obtient les deux cas suivants :

Cas 1 bis

$(P$ et non$(Q)) \Longrightarrow C$ et non(C) où C est une proposition

Cas 2 bis

$(P$ et non$(Q)) \Longrightarrow (C$ et non $C)$ où C est une proposition

Exemple du cas 1bis :

Quels que soient les entiers relatifs a et b, $a+b\sqrt{2}=0 \Longrightarrow b=0$.

On suppose qu'il existe a et b entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2}=0$ et $b \neq 0$.
Ainsi $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$. Ce qui entraîne que $\sqrt{2}$ est rationnel.

On a : P est la proposition "$a+b\sqrt{2}=0$", Q est la proposition "$b=0$" et C est la proposition "$\sqrt{2}$ est rationnel"

Exemple du cas 2 bis :

Dans l'ensemble des suites réelles, si $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2$ alors (u_n) diverge.

On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2$ et (u_n) converge vers une limite ℓ finie. Comme $u_{n+1} = u_n^2$, $\ell^2 = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui entraîne $\ell \leqslant 1$. D'autre part,(u_n) est croissante et $u_0 > 1$ donc $\ell > 1$.

On a : P est la proposition "$u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2$", Q est la proposition "(u_n) diverge" et C est la proposition "$\ell \leqslant 1$".

Temps 2 - Travail en groupes

Analyse en groupe de manuels scolaires de seconde, première S et terminale S.

Former 5 groupes de 4 personnes.

Temps 2 - Travail en groupes

Analyse en groupe de manuels scolaires de seconde, première S et terminale S.

Former 5 groupes de 4 personnes.

Critère 1 - Nature du RpA : Quelle forme du RpA est donnée dans la définition ? Pour quel type de proposition ?

Critère 2 - Vocabulaire : quel vocabulaire est employé ?

Critère 3 - Articulation définition/exemple : Quel lien y-a-t-il entre la définition proposée et les exemples qui suivent ?

Critère 4 - Pertinence des exemples : les exemples proposés vous semblent-ils pertinents à traiter par un raisonnement par l'absurde ?

20 minutes

Temps 3 - Travail en groupes

Confrontation des analyses des différents manuels.

Former 4 groupes de 5 personnes.

Confrontation des analyses des différents manuels.

Former 4 groupes de 5 personnes.

Quelles différences et similitudes pouvez-vous relever dans vos analyses des différents manuels ?

20 minutes

Temps 4 - Travail en groupes

Réflexion sur des points de vigilance

Reformer les 5 groupes de 4 personnes.

Temps 4 - Travail en groupes

Réflexion sur des points de vigilance

Reformer les 5 groupes de 4 personnes.

Réfléchir à quelques points de vigilance pour l'enseignement du RpA, en classe ou en formation.

20 minutes

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction
- Proposer les deux formes du RpA

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction
- Proposer les deux formes du RpA
- Séparer les cas proposition élémentaire (en seconde) et proposition composée - implication (en première)

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction
- Proposer les deux formes du RpA
- Séparer les cas proposition élémentaire (en seconde) et proposition composée - implication (en première)
- Vigilance sur l'articulation entre la définition proposée et les exemples donnés

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction
- Proposer les deux formes du RpA
- Séparer les cas proposition élémentaire (en seconde) et proposition composée - implication (en première)
- Vigilance sur l'articulation entre la définition proposée et les exemples donnés
- Proposer des exemples pertinents. Par exemple, éviter les raisonnements qui s'effectuent par contraposée ou par équivalence

Temps 5 - Bilan - Quelques points de vigilance

- Vigilance sur le vocabulaire utilisé : proposition, négation, contradiction
- Proposer les deux formes du RpA
- Séparer les cas proposition élémentaire (en seconde) et proposition composée - implication (en première)
- Vigilance sur l'articulation entre la définition proposée et les exemples donnés
- Proposer des exemples pertinents. Par exemple, éviter les raisonnements qui s'effectuent par contraposée ou par équivalence
- Vigilance sur l'"opérationnalité" de la définition proposée pour les élèves

Des pré-requis :

- avoir travaillé la notion de proposition

Des pré-requis :

- avoir travaillé la notion de proposition
- avoir travaillé la négation d'une proposition (élémentaire ou composée)

Des pré-requis :

- avoir travaillé la notion de proposition
- avoir travaillé la négation d'une proposition (élémentaire ou composée)
- avoir commencé un travail sur l'implication

Des pré-requis :

- avoir travaillé la notion de proposition
- avoir travaillé la négation d'une proposition (élémentaire ou composée)
- avoir commencé un travail sur l'implication
- avoir travaillé "comment démontrer qu'une proposition est fausse ?"

Comment démontrer qu'une proposition est fausse ?

Soit P une proposition. Montrer que P est fausse.

- **Premier cas** : on montre que sa négation est vraie *i.e.* on montre que (non P) est vraie.

Comment démontrer qu'une proposition est fausse ?

Soit P une proposition. Montrer que P est fausse.

- **Premier cas** : on montre que sa négation est vraie *i.e.* on montre que (non P) est vraie.
- **Second cas** : on montre qu'elle implique une proposition que l'on sait par ailleurs fausse *i.e.* on montre que P implique C et on sait que C est fausse.

Comment démontrer qu'une proposition est fausse ?

Soit P une proposition. Montrer que P est fausse.

- **Premier cas** : on montre que sa négation est vraie *i.e.* on montre que (non P) est vraie.
- **Second cas** : on montre qu'elle implique une proposition que l'on sait par ailleurs fausse *i.e.* on montre que P implique C et on sait que C est fausse.
- **Troisième cas** : on montre qu'elle implique une proposition et sa négation *i.e.* on montre que P implique (C et non C).

Définition d'un raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation est fausse.

Définition d'un raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement mathématique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant que sa négation est fausse.

Soit P une proposition. Montrer que P est vraie revient à montrer que (non P) est fausse. Pour montrer que (non P) est fausse, on peut montrer que :

- (non P) implique C et C est une proposition fausse
  OU
- (non P) implique (C et non C) où C est une proposition.

Définition d'un raisonnement par l'absurde (suite)

En Seconde - *uniquement pour une proposition élémentaire*

- Exemple 1 - $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal
- Exemple 2 - Irrationalité de $\sqrt{2}$.
- Exemple 3 - Démontrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses trois sommets à coordonnées entières.
- Exemple 4 - Les « bêtes à mauvais caractère » sont des animaux qui ne peuvent cohabiter que sous une condition : être éloignés les uns des autres d'au moins huit mètres. Peut-on faire cohabiter 10 « bêtes à mauvais caractère » dans un enclos rectangulaire de 18 mètres de longueur et de 15 mètres de largeur ?

Conclusion

- Le RpA est complexe...et son enseignement aussi ! Il faut donc être vigilant pour construire les apprentissages.
- Le RpA permet de travailler de nombreuses notions de logique : proposition, négation, implication, contraposée, etc.

- Poursuite de la recherche : une enquête est en cours auprès d'élèves de terminale S, d'étudiants de CPGE et d'étudiants de L1.

MERCI !

Références

- Bernard, D., Gardes, D., Gardes, M.-L. & Grenier, D. (2019). Le raisonnement par l'absurde, une étude didactique pour le lycée. *Petit x 108*, 5-40.
- Cambrésy-Tant, V., Cambrésy, D. & Carpentier, S. (1998). *Autour du raisonnement par l'absurde*. IUFM Nord-Pas-de-Calais.
- Gardies, J.-L. (1991). *Le raisonnement par l'absurde*. PUF. Paris.
- Lombard, P. (1996). À propos du raisonnement par l'absurde. *Bulletin APMEP, 405*, 445-455.
- Lombard, H. (1997). Le raisonnement par l ?absurde. Repères IREM, 29, 27-42.