Chapitre 1

Figures en évolution - août 2018

La suite d'activités présentée ici est destinée à des élèves de 11 à 14 ans. Les problèmes peuvent être résolus par des enfants de la fin du primaire. L'analyse des méthodes de résolution en vue d'aborder d'autres problèmes leur est également accessible. Les exploitations plus spécifiquement mathématiques conduisant aux formules algébriques, aux représentations graphiques et aux équations sont plutôt destinées aux élèves du début du secondaire. Chaque enseignant jugera de ce qu'il peut faire avec sa classe, en fonction de l'âge des élèves et de leurs capacités.

De quoi s'agit-il ? Compléter une famille de figures en vue de comparer les éléments de deux suites de nombres caractéristiques de la famille.

Enjeux Établir des liens entre les registres registres géométrique, graphique et numérique.

Présenter des résultats dans des tableaux ordonnés de nombres.

Dégager des régularités dans un tableau de nombres, élaborer des conjectures.

Distinguer conjecture et preuve.

Compétences transversales

Repérer, reformuler la ou les question(s) explicite(s) [...].

Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, [...] *).*

Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.

Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres [...]

S'exprimer dans un langage clair et précis ; citer l'énoncé qu'on utilise pour argumenter ; maîtriser le symbolisme mathématique usuel, le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarches ou de la solution.

Distinguer « ce dont on est sûr » de « ce qu'il faut justifier ».

Compétences disciplinaires

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Dans un contexte [...] de pavage et de reproductions de dessins, relever la présence de régularités.

Organiser selon un critère.

Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.

Associer un point à ses coordonnées dans un repère.

Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.

1 Carpettes carrées

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Deux séances de 50 minutes.

Matériel par élève

Les fiches 1 à 3 aux pages 22 à 24.

Comment s'y prendre ?

La séquence se déroule en deux temps. Durant la première séance, l'enseignant reste en retrait pendant que les élèves résolvent le problème. Lors de la seconde séance, l'enseignant anime le débat entre élèves pour dégager des stratégies qui pourront être réexploitées en résolution de problèmes et des manières efficaces de les mettre en œuvre.

1.1 Le problème de la carpette carrée

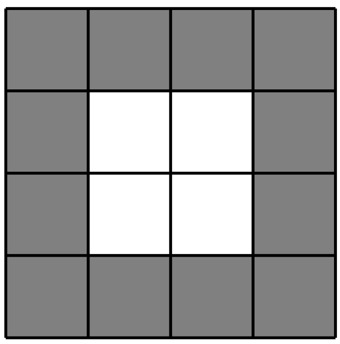
Chaque élève reçoit la fiche 1 reprenant l'énoncé du problème ci-dessous.

Carpettes carrées (d'après ©ARMT)

On commercialise un nouveau type de carpette carrée, constituée de petits carrés identiques : une rangée de gris sur les bords et des blancs à l'intérieur. La plus grande carpette a 10 carrés gris par côté.

Est-il possible d'avoir une carpette de ce type composée du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Expliquez votre démarche.



Exemple de carpette

On attend des élèves qu'ils comparent le nombre de carrés gris et le nombre de carrés blancs de chacune des carpettes respectant les conditions, et qu'ils constatent qu'il n'existe aucune carpette qui réponde à la question.

L'enseignant laisse aux enfants un temps de réflexion individuelle, puis il les répartit en groupes pour poursuivre la phase de résolution.

1.2 Les démarches

Nous décrivons ci-après quelques démarches qui peuvent être mobilisées par les élèves pour résoudre ce problème. Nous nous appuyons sur le vécu dans les classes où le problème a été proposé. C'est sur base de cette expérience que nous avons tenté d'anticiper la plupart des situations qui pourraient se présenter dans une classe confrontée à ce problème, certains comportements d'élèves étant extrêmement fréquents, d'autres plus anecdotiques.

Les premières démarches relèvent de l'exhaustion. Les élèves recensent toutes les carpettes possibles en les représentant par des schémas ou en plaçant des résultats dans un tableau. Les démarches aboutissent à la solution par comparaison des nombres de carrés gris et blancs de toutes les carpettes à considérer (voir 1.2.1).

Les suivantes sont incomplètes en ce sens que tous les cas n'y sont pas envisagés, mais peuvent néanmoins aboutir à la solution (voir 1.2.2).

Les dernières se basent sur des raisonnements erronés, qui empêchent d'arriver à la solution (voir 1.2.3). Comme le problème est de nature géométrique au départ, mais qu'il débouche sur une question numérique, nous avons relevé des erreurs de deux types :
— erreurs dans la lecture ou l'interprétation géométrique de l'énoncé,
— erreurs liées aux relations entre les nombres.

1.2.1 Démarches correctes qui aboutissent à la solution

Les élèves commenceront probablement par dessiner quelques carpettes pour en dresser ensuite un inventaire plus ou moins organisé. Ils peuvent dessiner tout ou une partie de l'ensemble des carpettes possibles et dénombrer les carrés gris et blancs de chacune. Il est très probable que dans un premier temps, les élèves réalisent des dessins ou des tableaux désordonnés, l'enseignant pourra par la suite les inciter à organiser leur production pour y voir plus clair. Idéalement, ces nombres de carrés gris et blancs sont notés, soit près du dessin correspondant comme dans la figure 1, soit dans un tableau tel que le tableau 1. Le fait que la carpette de l'exemple se retrouve dans les dessins et dans le tableau conforte les élèves dans cette démarche. La carpette composée de 64 carrés blancs et de 36 carrés gris est bien la plus grande qui doit être examinée, elle compte 10 carrés gris sur chaque côté.

La question de l'exhaustion devrait se poser à ceux qui n'auraient pas organisé leurs recherches de manière systématique. L'enseignant peut les inciter à réorganiser les carpettes examinées par ordre de taille, comme à la figure 1. La question de la plus petite carpette devrait surgir. Comme l'intérieur doit être composé de carrés blancs, il vient que la plus petite doit contenir un seul carré blanc à l'intérieur et donc 8 carrés gris. Même si, pour certains, il est évident que cette carpette n'est pas solution, le cas doit être envisagé si on dresse un inventaire complet. Une fois identifiées la plus petite et la plus grande carpette à prendre en compte, les élèves doivent encore comprendre que tous les cas ont été examinés dès que le nombre de carrés blancs sur un côté du carré intérieur – ou le nombre de carrés gris sur un côté du carré extérieur – augmente de 1 chaque fois qu'on passe d'une carpette à la suivante.

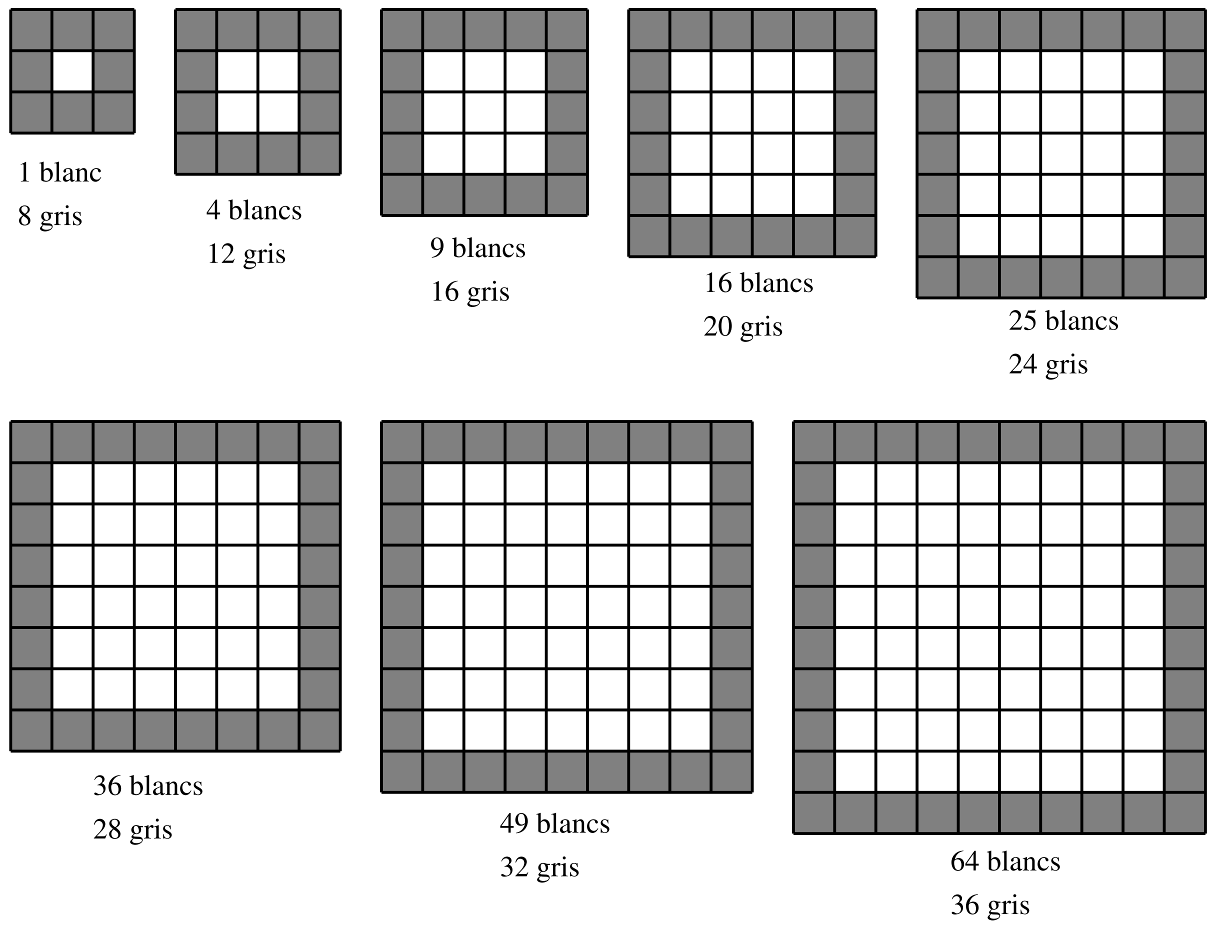


Fig. 1

Nombre de carrés blancs sur un côté	Nombre de carrés blancs (à l'intérieur)	Nombre de carrés gris (de la bordure)
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
6	36	28
7	49	32
8	64	36

Tab. 1

Si les élèves ont organisé leurs dessins et/ou leur tableau en allant de la carpette la plus petite à la plus grande, il leur sera plus facile de repérer les liens entre les nombres de carrés blancs ou gris d'une carpette et ceux de la carpette de dimension immédiatement supérieure. Pour les carrés blancs de l'intérieur, il s'agit de la suite des nombres carrés, pour les carrés gris de la bordure, c'est une progression arithmétique de raison 4. Les élèves qui auraient observé ces liens sur les premières carpettes de la suite pourraient éviter de faire tous les dessins.

Blancs	Gris	
$1 = 1 \times 1 = 1^2$	8	$+ 4$
$4 = 2 \times 2 = 2^2$	12	$+ 4$
$9 = 3 \times 3 = 3^2$	16	$+ 4$
$16 = 4 \times 4 = 4^2$	20	$+ 4$
$25 = 5 \times 5 = 5^2$	24	$+ 4$
$36 = 6 \times 6 = 6^2$	28	$+ 4$
$49 = 7 \times 7 = 7^2$	32	$+ 4$
$64 = 8 \times 8 = 8^2$	36	

Tab. 2

En observant ces suites de nombres, certains élèves remarqueront peut-être que

— pour les quatre premières carpettes, le nombre de carrés blancs est inférieur au nombre de carrés gris ;

— à la cinquième carpette ces nombres sont presque égaux, mais le nombre de carrés blancs surpasse de 1 le nombre de carrés gris ;

— à partir de là, non seulement le nombre de carrés blancs reste toujours supérieur au nombre de carrés gris, mais l'écart entre les nombres ne cesse d'augmenter.

Les élèves devraient alors être en mesure de conclure qu'il n'y a aucune carpette carrée qui réponde à la question. Arriver à une telle conclusion en déroutera plus d'un car les élèves ne sont pas souvent confrontés à des problèmes qui n'ont pas de solution. Ils peuvent avoir l'impression que cette réponse n'est pas valide, croire qu'ils ont mal compté, ou qu'ils n'ont pas examiné tous les cas.

Le tableau 3 reprend l'ensemble des valeurs que les élèves pourraient calculer.

Une des démarches possibles pour calculer le nombre de carrés gris sur les bords sans les dénombrer est de calculer le nombre de carrés total de chaque carpette et d'en soustraire le nombres de carrés blancs à l'intérieur. C'est la raison d'être de la troisième colonne.

Nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc	Nombre de carrés sur un côté de la carpette	Nombre total de carrés de la carpette	Nombre total de carrés blancs de la carpette	Nombre total de carrés gris de la carpette	Écart
1	3	9	1	8	7
2	4	16	4	12	8
3	5	25	9	16	7
4	6	36	16	20	4
5	7	49	25	24	1
6	8	64	36	28	8
7	9	81	49	32	17
8	10	100	64	36	28

Tab. 3

Les tableaux des élèves ne comporteront sans doute que quelques-unes des colonnes du tableau 3 et seront probablement différents d'un groupe à l'autre. Il se peut que certains examinent plus de cas que l'énoncé ne le prévoit, faisant varier le nombre de carrés blancs sur un côté de 1 à 10, ou encore envisageant une carpette comportant un seul carré gris, ou quatre carrés gris.

La plupart des élèves arriveront à la conclusion qu'il n'y a pas de solution par comparaison entre les colonnes qui reprennent le nombre de carrés blancs à l'intérieur et le nombre de carrés gris sur la bordure. D'autres se focaliseront uniquement sur l'écart entre les nombres de carrés gris et blancs pour aboutir au même résultat.

1.2.2 Démarches incomplètes

Les élèves peuvent arriver à la conclusion attendue, mais par une démarche qui ne prend pas en compte l'ensemble des cas.

Certains élèves négligeront d'examiner la carpette la plus petite qui ne comporte qu'un seul carré blanc au centre, et commenceront leur inventaire à partir de la carpette de l'énoncé.

D'autres voudront économiser des figures en dessinant des carrés « emboîtés » comme dans la figure 2. Chaque carpette est, à chaque étape, considérée comme le centre de la suivante. Le tableau 4 rend compte de la situation.

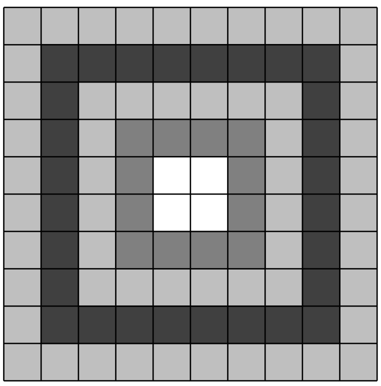


Fig. 2

L'idée est séduisante mais, en voulant rationaliser le travail, on omet la moitié des cas, ceux avec un nombre impair de carrés sur un bord de la carpette.

Nombre de carrés du centre	Nombre de carrés de la bordure
4	12
$4 + 12 = 16$	20
$16 + 20 = 36$	28
$36 + 28 = 64$	36

Tab. 4

En procédant de la sorte, on augmente de deux à chaque étape le nombre de carrés sur un côté du carré intérieur, ou de la bordure. Comme on ne trouve pas de solution, il faut s'assurer que toutes les carpettes ont été examinées pour pouvoir conclure. C'est l'absence de solution qui doit faire prendre conscience de la nécessité de l'exhaustion. Si un groupe passe complètement à côté des carpettes avec un nombre impair de carrés sur un bord, la question de leur existence devrait surgir lors de la mise en commun.

Remarquons que la démarche similaire avec comme carpette de départ celle qui a un carré blanc au centre et trois carrés gris sur un bord ne ferait apparaître ni la carpette de l'énoncé ni la carpette la plus grande avec 10 carrés gris par côté.

1.2.3 Démarches inadaptées ou incorrectes

Le problème proposé peut confronter les élèves à certaines difficultés, normales à ce stade de l'apprentissage. Voici quelques-unes des démarches dans lesquelles les élèves pourraient s'engager et qui ne les mèneront pas à la conclusion attendue.

Dans le registre géométrique

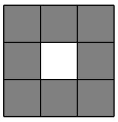


Fig. 3

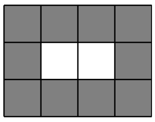


Fig. 4

Une lecture trop rapide de l'énoncé, ou le fait de ne pas trouver de solution, peut amener certains élèves à dessiner des carpettes rectangulaires, en oubliant la contrainte de s'en tenir à des carpettes carrées, passant par exemple de la carpette avec un carré blanc à l'intérieur (figure 3) à une carpette rectangulaire qui en contient deux (figure 4).

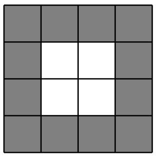


Fig. 5

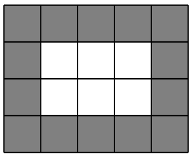


Fig. 6

Certains autres font suivre la carpette de l'énoncé qui compte quatre carrés blancs à l'intérieur (figure 5), d'une autre qui en compte six (figure 6).

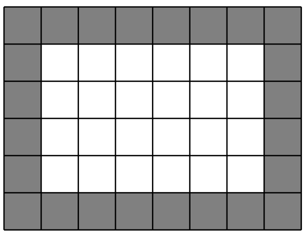


Fig. 7

Les élèves qui proposent des carpettes rectangulaires s'imaginent avoir trouvé une solution en exhibant par exemple la carpette de la figures 7, qui compte 24 carrés gris et 24 blancs.

On peut espérer que le travail en groupe donnera lieu à une discussion sur la lecture correcte de l'énoncé, et sur la formulation de la question. Il n'est pas exclu que le fait de ne pas trouver de carpette qui remplisse les conditions déstabilise certains élèves au point de les inciter à envisager une version « généralisée » de l'énoncé qui débouche sur une solution.

Dans le registre numérique

Dans la carpette de l'énoncé, il y a 4 carrés gris sur le bord et 12 carrés gris sur la bordure. Certains élèves établissent un lien entre ces deux nombres et s'imaginent qu'on obtient le nombre de carrés gris de la carpette en multipliant par 3 le nombre de carrés gris sur un bord.

Refaire le lien avec la situation et tester la « règle de calcul » sur une autre carpette suffit à montrer qu'elle est incorrecte. C'est une généralisation abusive à partir d'un exemple qui est à mettre en évidence si cette procédure apparaît.

Un autre écueil, très perturbant pour les élèves, risque de se présenter si certains d'entre eux veulent utiliser la formule du périmètre d'une figure pour calculer le nombre de carrés gris de la bordure de la carpette. Cette formule les incite à croire que le nombre de carrés gris de la bordure est égal à quatre fois le nombre de carrés gris sur le bord. La carpette de l'énoncé fournit un contre-exemple, puisque pour un côté de 4 carrés, la bordure en compte 12. C'est à nouveau un retour à la situation concrète qui leur fait prendre conscience du fait que cette démarche les conduit à compter deux fois les carrés des coins. L'enseignant devra faire face à ce problème s'il surgit, mais si aucun élève ne s'engage dans cette voie, il vaut mieux ne pas attirer l'attention sur cette difficulté.

Les deux exemples traités ci-dessus montrent que c'est le recours au registre géométrique qui permet de corriger des erreurs apparues dans le cadre numérique.

1.3 Exploitation

Les élèves reçoivent la fiche 2 et sont invités à remplir un tableau similaire au tableau 3. Comme les intitulés des colonnes ne correspondent pas forcément à ce qui figure dans les tableaux des élèves, la première démarche est de bien interpréter ce qui est demandé dans chaque colonne. Les élèves doivent repérer dans leur propre tableau les nombres à reporter dans le tableau de la fiche et les recopier dans la colonne adéquate. Pour remplir les colonnes manquantes, ils sont encouragés à s'adresser aux autres groupes.

Cette fiche 2 est notamment destinée à ce que les élèves gardent une trace de l'activité au cahier. Nous insistons sur le fait que la distribuer trop tôt risque de court-circuiter toute démarche originale que les élèves pourraient imaginer et vider le débat de son contenu. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir complété toutes les colonnes du tableau pour conclure.

À la fin de cette phase de mise en commun, tous disposent du tableau 3 repris ci-dessous.

Nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc	Nombre de carrés sur un côté de la carpette	Nombre total de carrés de la carpette	Nombre total de carrés blancs de la carpette	Nombre total de carrés gris de la carpette	Écart
1	3	9	1	8	7
2	4	16	4	12	8
3	5	25	9	16	7
4	6	36	16	20	4
5	7	49	25	24	1
6	8	64	36	28	8
7	9	81	49	32	17
8	10	100	64	36	28

Sur base du tableau, l'enseignant invite les élèves à établir des liens entre les nombres qui apparaissent dans les colonnes et les lignes.

Les élèves reçoivent ensuite la fiche 3 qui comporte des questions destinées à leur faire formaliser et compléter les observations.

Voici quelques exemples des formulations attendues en comparant les colonnes.

— Le nombre de carrés sur un côté de la carpette (deuxième colonne) surpasse de 2 le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc (première colonne).
— Le nombre total de carrés de la carpette (troisième colonne) est le carré du nombre de carrés sur un côté de la carpette (deuxième colonne).
— Le nombre de carrés blancs à l'intérieur de la carpette (quatrième colonne) est le carré du nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc (première colonne).
— Le nombre total de carrés gris (cinquième colonne) est la différence entre le nombre total de carrés de la carpette (troisième colonne) et le nombre total de carrés blancs à l'intérieur de la carpette (quatrième colonne).

Les liens au sein d'une colonne sont également porteurs d'enseignements.

— Le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc de la carpette (première colonne) augmente de 1 à chaque étape, ce qui garantit que tous les cas ont été examinés du moment que la première et la dernière ligne correspondent respectivement à la plus petite et à la plus grande carpette.
— Le nombre de carrés sur un bord de la carpette (deuxième colonne) augmente également de 1 à chaque étape.
— Les suites de nombres carrés (troisième et quatrième colonnes) qui correspondent respectivement à la suite des aires des carpettes et à la suite des aires des zones blanches intérieures, peuvent servir à introduire la notion de puissance.
— Le nombre de carrés gris de la bordure (cinquième colonne) augmente de 4 à chaque étape.
— Le fait que l'écart qui apparaît dans la sixième colonne ne s'annule jamais est à mettre en relation avec le fait qu'aucune carpette ne répond à la question.

La régularité dans la suite des nombres de carrés gris de la bordure peut donner lieu à une discussion intéressante. L'enseignant revient sur l'observation qu'on ajoute chaque fois 4 pour obtenir le nombre de carrés gris de la carpette qui a un carré de plus sur le bord, et demande si on peut en déduire que cette propriété est toujours vérifiée. Les élèves peuvent apporter à cette question des réponses de différents niveaux.

— Certains enfants dessinent quelques cas, ne trouvent pas de contre-exemple et généralisent, ils conjecturent qu'elle est toujours vraie.
— D'autres, qui ont dessiné tous les cas, constatent que la propriété est toujours vraie. Cette attitude est correcte lorsque le nombre de cas est fini.
— D'autres encore, après examen de quelques cas, se convainquent par un raisonnement que la propriété est toujours vraie.

L'enseignant essaiera d'amener les élèves à valoriser progressivement la troisième attitude et à rechercher des arguments pour valider la conjecture. Les élèves pourraient produire des raisonnements tels que : comme la carpette « qui suit » a un carré gris de plus sur un côté du bord et qu'il y a 4 côtés, on a 4 carrés gris supplémentaires à chaque étape.

Synthèse

Après la confrontation des différentes propositions des élèves, l'enseignant met en évidence les procédés qui ont aidé à dégager la solution et qui pourront être réexploités dans la résolution d'autres problèmes :

— dessiner pour comprendre la situation ;
— organiser ses recherches surtout si les cas examinés deviennent nombreux, si on se partage le travail ou si on veut s'assurer de les avoir envisagés tous ;
— faire des liens entre différents éléments ;
— recourir au cadre géométrique pour valider des observations effectuées dans le cadre numérique, ou inversement ;
— une fois le problème résolu, présenter les résultats de recherche dans un tableau clair avec des intitulés explicites comme titres des colonnes pour décrire les nombres qu'on y introduit.

La synthèse doit mettre en évidence l'intérêt de travailler simultanément dans plusieurs registres de représentations, dans plusieurs contextes. C'est le va-et-vient entre le registre géométrique et le numérique qui est souvent porteur de sens, chacun des deux registres éclairant ou validant l'autre.

1.4 Vers l'algébrisation

La situation peut servir de point de départ pour introduire des expressions algébriques et en tester l'équivalence.

On abandonne la contrainte de 10 carrés gris maximum sur un bord, et on pose la question suivante, ou une du même type.

Comment pourrait-on faire pour calculer le nombre de carrés gris de la bordure si on sait que la carpette a 15 carrés blancs sur le côté de la partie centrale ?

À ce stade, les élèves peuvent encore faire le dessin et expliquer leur méthode de calcul. Après avoir développé un exemple et observé que différents calculs donnent la même réponse, on augmente de manière significative la taille des carpettes pour provoquer le recours à la généralisation. On repose donc la même question en donnant comme seule indication que le nombre de carrés blancs sur un bord du grand carré intérieur est 150, ou 243, ou n'importe quel nombre assez grand pour que les élèves soient découragés de dessiner tous les carrés.

On demande en fait aux élèves d'élaborer des « programmes de calcul » qui permettent d'obtenir directement le nombre de carrés gris de la bordure. À partir de leurs programmes, souvent expliqués en langage naturel, les élèves seront amenés à écrire une expression algébrique qui fournira le nombre demandé à l'aide d'un seul calcul.

Nous présentons ici quelques programmes de calcul que pourraient proposer les élèves ; on insiste bien sur le fait que le but est de pouvoir calculer le nombre de carrés gris de la bordure quel que soit le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale. Les dessins qui illustrent les différentes méthodes de calcul peuvent donc être réalisés pour des carpettes de petite taille (figures 8 à 11).

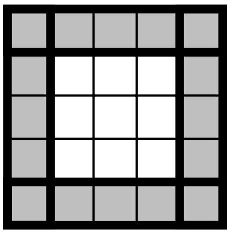


Fig. 8

À l'aide de la figure 8, le nombre de carrés gris de la carpette est calculé à partir de la juxtaposition de quatre bandes ayant chacune la longueur du côté du carré blanc. On remarque qu'il faut encore ajouter les « coins », ce qui donne : « le nombre de carrés gris est quatre fois le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale plus quatre ».

On facilite la formulation en notant b le nombre de carrés blancs sur un côté du carré intérieur de la carpette, et on écrit

$$\text{nombre de carrés gris} = 4 \times b + 4.$$

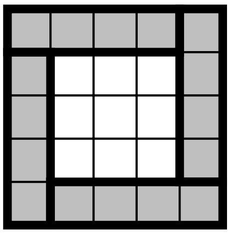


Fig. 9

La figure 9 montre une autre vision de la situation, le nombre de carrés gris de la carpette est calculé à partir de la juxtaposition de quatre bandes comportant chacune un carré de plus que le bord du carré intérieur : « le nombre de carrés gris est quatre fois le nombre de carrés blancs sur un côté de la partie centrale plus un ». La formule est alors :

$$\text{nombre de carrés gris} = 4 \times (b + 1).$$

La similitude des deux phrases en français montre que la formulation mathématique est ici beaucoup plus précise : la phrase en français ne rend pas compte des parenthèses.

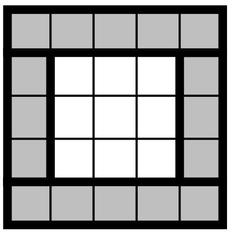


Fig. 10

On peut aussi compter deux bandes de même longueur que le côté du carré intérieur blanc et deux bandes qui comptent deux carrés de plus que les précédentes, comme illustré par la figure 10. On obtient alors

$$\text{nombre de carrés gris} = 2 \times b + 2 \times (b + 2).$$

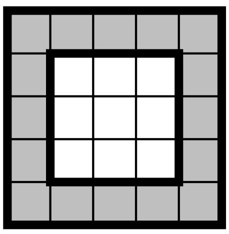


Fig. 11

Une autre façon de calculer le nombre de carrés de la bordure est de retrancher le nombre de carrés du carré intérieur blanc du nombre total de carrés de la carpette, en s'appuyant sur la figure 11, ce qui donne

$$\text{nombre de carrés gris} = (b + 2)^2 - b^2.$$

Cet inventaire de procédés et de formules n'est bien sûr pas exhaustif. Les élèves peuvent observer que différents programmes de calcul donnent le même résultat si on fixe la même valeur pour b. En donnant à b les valeurs qui figurent dans la première colonne du tableau 3, on retrouve les valeurs de la cinquième colonne du tableau avec l'une ou l'autre de ces formules. De plus, les formules obtenues permettent de calculer les nombres de carrés gris de n'importe quelle carpette du même type, aussi grande que l'on veut.

Le fait d'avoir des programmes de calcul différents qui donnent le même résultat (pour la même situation) indique que les expressions littérales différentes qui en découlent sont équivalentes. Cette observation permet d'introduire certaines règles du calcul algébrique et ensuite de les vérifier.

Notons pour l'enseignant que les formules ainsi obtenues ne pourront pas être mobilisées pour résoudre le problème par le biais d'une mise en équation. Le nombre de carrés blancs étant b^2, l'équation obtenue est du deuxième degré et n'est pas à la portée des élèves du début du secondaire. Il faudra éviter d'induire dans le chef de l'élève la conception erronée que le problème n'a pas de solution parce que l'équation est du deuxième degré. D'autres problèmes du même genre, exposés plus loin, débouchent sur une équation du premier degré à la portée des élèves. L'existence d'une solution au problème sera mise en relation avec l'existence d'une solution entière et positive de l'équation.

Un travail similaire peut être fait en faisant varier le nombre de carrés gris sur un côté de la carpette. Cependant ces formules sont un peu plus difficiles à obtenir et à manipuler car les expressions algébriques utilisent la soustraction.

2 Tapis rectangulaires

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Deux séances de 50 minutes.

Matériel par élève

Les fiches 4 à 6 aux pages 25 à 27.

Comment s'y prendre ?

On soumet aux élèves deux nouveaux problèmes assez semblables au précédent quant à la forme de l'énoncé. La résolution se déroule en deux temps. Durant le premier temps, le premier problème est proposé aux élèves et résolu sans intervention de l'enseignant qui reste en position d'observateur. Dès que les élèves ont résolu le premier problème, on leur donne le second qui, bien que très semblable au premier, débouche sur une tout autre conclusion.

À la fin de l'activité, l'enseignant anime le débat entre élèves pour dégager les similitudes d'énoncés entre les différents problèmes, les stratégies menées dans les deux cas et la comparaison des solutions.

Lors d'une seconde séance, l'enseignant prend en charge l'exploitation de l'activité en incitant les élèves à
- établir un graphique pour chacun des deux problèmes,
- comparer ces graphiques,
- établir des formules pour écrire des équations,
- réinterpréter les conclusions à la lumière des graphiques et des résolutions d'équations.

2.1 Premier problème

Les élèves reçoivent chacun la première partie de la fiche 4 avec l'énoncé du problème repris ci-dessous.

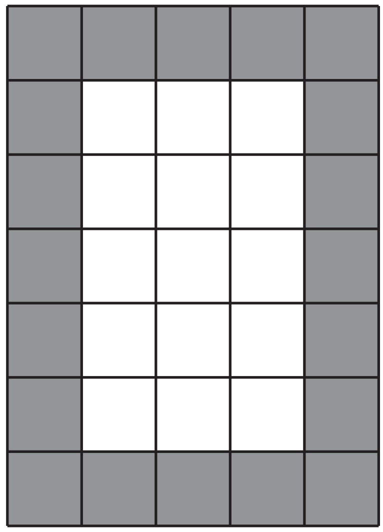
Tapis rectangulaires (I)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

Sachant que ces tapis ont tous trois carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

Expliquez votre démarche.



La situation proposée est une variante des « Carpettes carrées » présentée dans la section précédente. Ici on ne considère plus des modèles carrés, mais des modèles rectangulaires dont la dimension d'un côté du rectangle intérieur est fixée. La bordure du tapis est toujours formée d'une simple rangée de carrés gris. La question posée au départ est la même, mais comme il n'y a plus de dimension maximum pour le tapis, les élèves sont confrontés à un nombre infini de cas. En plus de la question de l'existence d'une solution, celle de son unicité est posée.

2.2 Les démarches : dessins et tableaux

Comme dans la résolution du problème des carpettes carrées, les élèves déploient habituellement des stratégies mêlant dessins et tableaux de nombres.

Afin d'éviter de dessiner un à un les différents tapis, certains élèves peuvent penser à la démarche illustrée en figure 12. Les tapis sont complétés au fur et à mesure, en ajoutant une rangée au tapis de l'étape précédente. Les carrés de la bordure sont laissés blancs sur la feuille et ceux de l'intérieur sont coloriés ou marqués (avec un disque dans l'exemple). À chaque étape, on compte les carrés de l'intérieur et ceux de la bordure et les nombres sont reportés dans un tableau. Les élèves peuvent y constater les accroissements constants du nombre de carrés à l'intérieur ou sur la bordure.

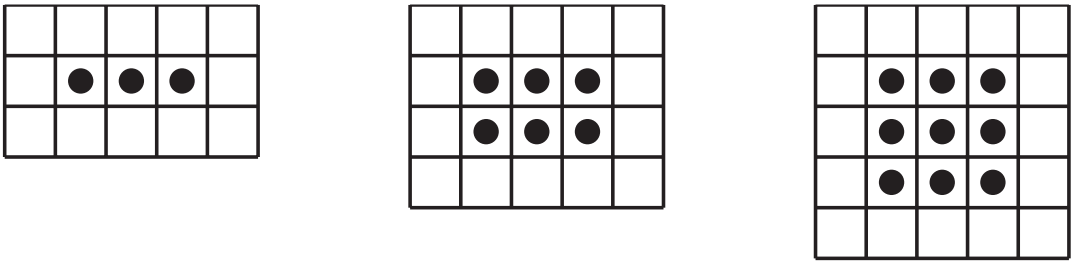


Fig. 12

Trois carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc (intérieur)	Nombre total de carrés blancs (intérieur)	Nombre total de carrés gris (bordure)
1	3	12
2	6	14
3	9	16
4	12	18
5	15	20
6	18	22
7	21	24
8	24	26
9	27	28
10	30	30
11	33	32
12	36	34
⋮	⋮	⋮

Tab. 5

Le tableau 5 présente les nombres ainsi obtenus lorsque le nombre de rangées du rectangle blanc augmente d'une unité à chaque ligne.

Il est fort possible que certains élèves rejettent le tapis du tableau qui a un intérieur blanc de forme carrée (troisième ligne) car pour ceux-ci un rectangle possède par définition une largeur strictement plus petite que sa longueur. Il faudra amener ces élèves à faire évoluer leur point de vue sur les figures pour qu'ils considèrent le carré comme un rectangle particulier.

En construisant le tableau, les élèves constatent que, à chaque fois qu'on ajoute une rangée de carrés blancs dans la partie centrale de la carpette, le nombre de carrés blancs augmente de trois et le nombre de carrés gris augmente de deux. Ces accroissements constants quand on passe d'une ligne à la suivante peuvent être justifiés géométriquement à l'aide de la figure 13.

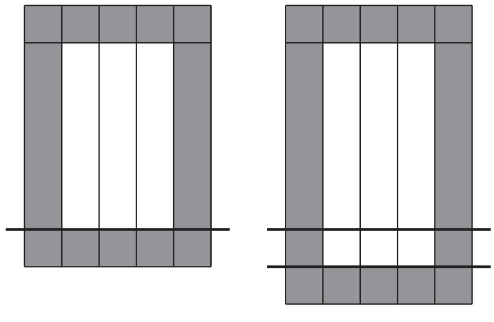


Fig. 13

Dans ce premier problème avec trois carrés dans les rangées du rectangle blanc, il y a une solution avec 10 rangées de carrés blancs, solution que les élèves obtiendront dans leur inventaire, par schémas ou tableau de nombres.

Le fait d'avoir trouvé un tapis qui présente les caractéristiques demandées ne suffit pas pour répondre complètement à la question. L'existence d'une solution ne garantit pas son unicité.

L'argument qui apporte la preuve de l'unicité peut être développé à partir du tableau de nombres ou de la figure 13. À partir du cas où il y a 10 rangées de carrés blancs dans la partie centrale (où le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs) le nombre de carrés gris augmente de deux à chaque étape, tandis que le nombre de carrés blancs augmente de trois, le nombre de carrés blancs restera donc toujours supérieur au nombre de carrés gris et l'écart augmentera sans cesse.

Notons pour l'enseignant que cela correspond au fait que *des inégalités sont créées en ajoutant des quantités inégales aux deux membres d'une égalité.*

2.3 Deuxième problème

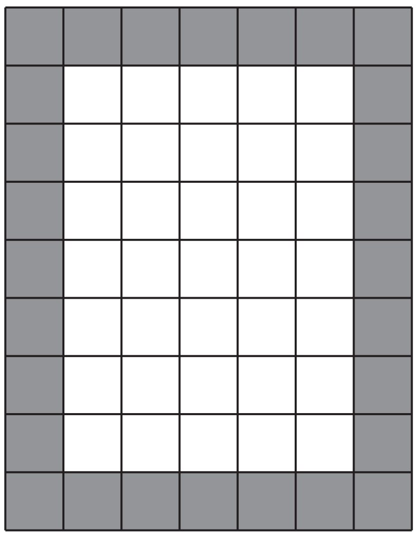
Tapis rectangulaires (II)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

Sachant que ces tapis ont tous cinq carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

Expliquez votre démarche.



Cette deuxième version est proposée aux élèves dès qu'ils ont résolu la première. On table sur le fait qu'ils voudront réinvestir ce qu'ils viennent de voir.

2.4 Les démarches : dessins et tableaux

Les élèves procèdent comme précédemment et remplissent un tableau, éventuellement à partir de schémas (figure 14).

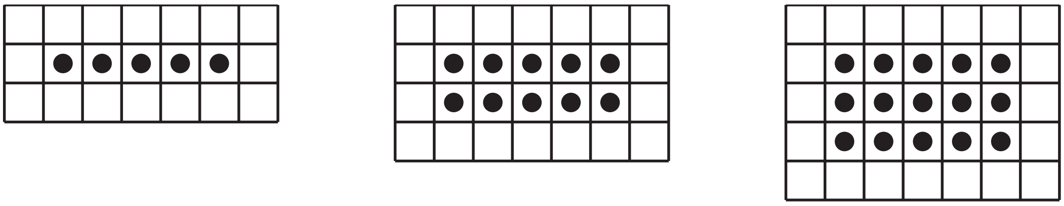


Fig. 14

Le tableau 6 montre les nombres de carrés blancs et gris lorsque le nombre de rangées dans la partie blanche au centre du tapis augmente de 1 à chaque fois. Cette fois, bien que l'énoncé du problème soit très semblable au précédent, le tableau 6 ne montre pas de valeur commune pour les nombres de carrés blancs et gris.

Cinq carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc (intérieur)	Nombre total de carrés blancs intérieur)	Nombre total de carrés gris (bordure)
1	5	16
2	10	18
3	15	20
4	20	22
5	25	24
6	30	26
7	35	28
8	40	30
9	45	32
10	50	34
11	55	36
⋮	⋮	⋮

Tab. 6

Les plus petits tapis ont moins de carrés blancs que de carrés gris, et ce jusqu'au tapis avec quatre rangées dans la partie centrale blanche qui compte 20 carrés blancs et 22 carrés gris. Le tapis suivant, avec cinq rangées dans la partie centrale (c'est un tapis carré), compte 25 carrés blancs et 24 gris. Il y a donc plus de carrés blancs à l'intérieur que de gris sur la bordure, et cela sera toujours le cas pour les tapis plus grands car l'écart entre les nombres de carrés blancs et gris ne cesse d'augmenter.

En effet, à chaque fois qu'on ajoute une rangée de carrés blancs dans la partie centrale de la carpette, le nombre de carrés blancs augmente de cinq et le nombre de carrés gris n'augmente que de deux.

Notons pour l'enseignant la propriété sous-jacente : *une inégalité est renforcée en ajoutant une quantité plus grande au membre le plus grand.*

Les accroissements constants quand on passe d'une ligne à la suivante peuvent être justifiés géométriquement à l'aide de la figure 15.

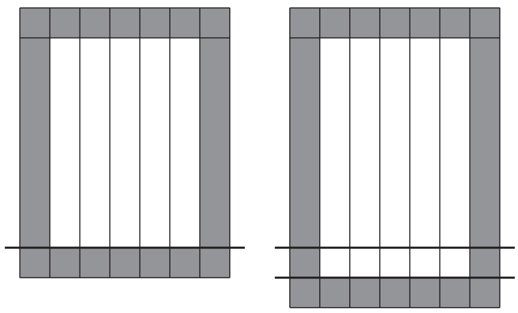


Fig. 15

2.5 Première synthèse : comparaison des deux problèmes

En fonction des différentes propositions des élèves, l'enseignant met en évidence les procédés qui ont permis de résoudre le problème. On retrouve les stratégies qui ont été porteuses lors de l'activité des carpettes carrées.

- — Dessiner pour comprendre la situation.
- — Placer les nombres à comparer dans un tableau.
- — Établir des liens entre les différents éléments.
- — Valider les régularités observées dans le registre numérique en les justifiant dans le registre géométrique sur une figure « typique ».

La fiche 5 à la page 26 est distribuée aux élèves pour dégager les solutions et faciliter la comparaison des deux problèmes.

Le premier problème a une solution qu'on détecte en observant le tableau. Encore faut-il s'assurer qu'elle est unique. Pour cela il faut avancer des arguments supplémentaires. Ainsi, à partir de la carpette qui compte dix rangées dans le rectangle blanc intérieur, et qui a autant de carrés blancs que de carrés gris (30) et en constatant que le nombre de carrés gris augmente de 2 à chaque étape alors que le nombre de carrés blancs augmente de 3, on peut déduire que le nombre de carrés gris restera toujours inférieur au nombre de carrés blancs.

Le deuxième problème n'a pas de solution apparente dans le tableau de nombres. Il faut justifier qu'il n'y en aura jamais, même si on prolonge le tableau. À partir de la carpette carrée qui compte cinq rangées dans le rectangle blanc intérieur, qui est la première carpette qui compte plus de carrés blancs (25) que de gris (24), et en constatant que le nombre de carrés blancs augmente de 5 à chaque étape alors que le nombre de carrés gris n'augmente que de 2, on peut déduire que le nombre de carrés blancs restera toujours supérieur au nombre de carrés gris.

Par rapport à l'existence et à l'unicité d'une solution, on retiendra que :

- — exhiber un exemple avec les caractéristiques demandées suffit à prouver l'existence d'un élément avec lesdites caractéristiques dans une famille infinie ;
- — pour justifier l'unicité de la solution, il faut avancer des arguments supplémentaires ;
- — inventorier beaucoup de cas possibles ne suffit pas pour justifier l'inexistence d'un élément avec certaines caractéristiques dans une famille infinie.

2.6 Exploitation

2.6.1 Représentations graphiques

Certains élèves pourraient penser à reporter les nombres du tableau sur un graphique. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant leur suggère de le faire. Le travail sur un graphique fait appel à un autre registre, qui permet de voir le problème sous un autre aspect.

Une première discussion avec les élèves porte sur le choix des variables à placer sur les axes. Dans les figures 16 et 17, nous avons choisi de porter en abscisse le nombre r de rangées de carrés blancs dans la partie centrale. Cela correspond à la première colonne du tableau, dont dépendent les deux autres colonnes. Ce n'est pas le seul choix possible, on pourrait par exemple opter pour le nombre de carrés gris sur le côté variable du tapis.

La fiche 6 à la page 27 facilite le travail en proposant un système d'axes orthonormés dans lequel les élèves auront à choisir la variable sur l'axe des abscisses (et à l'indiquer), puis à placer en ordonnée les nombres de carrés gris et les nombres de carrés blancs en utilisant des couleurs différentes pour la clarté du graphique. Nous suggérons d'interdire l'usage de la règle pour éviter le mesurage qui serait inadapté.

Problème I

La figure 16 montre un graphique [1] pour le premier problème.

Les élèves peuvent y voir que le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs (30) pour le tapis qui compte 10 rangées de carrés blancs dans la partie centrale. Cette observation est à mettre en relation avec ce qui a été découvert en élaborant le tableau 5.

Le graphique montre aussi que c'est le seul cas qui présente cette particularité.

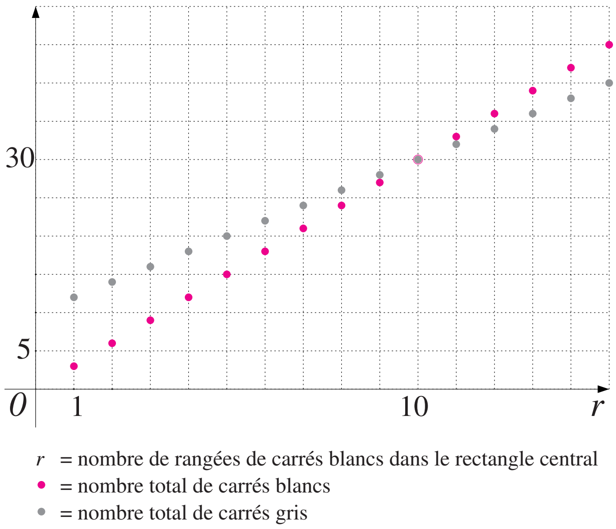


Fig. 16

Les élèves seront peut-être tentés de relier les points de ces graphiques en lignes droites. La discussion s'engagera alors sur la signification des points intermédiaires sur les droites.

Problème II

Une représentation graphique correspondant au deuxième problème apparaît à la figure 17. Celle-ci apporte un éclairage différent sur le fait que, pour les tapis les plus petits, le nombre de carrés blancs est inférieur au nombre de carrés gris, mais que la situation s'inverse à partir du cinquième tapis.

On y perçoit également l'écart entre les nombre de carrés blancs et gris qui diminue dans un premier temps, puis ne cesse d'augmenter à partir de $r = 5$.

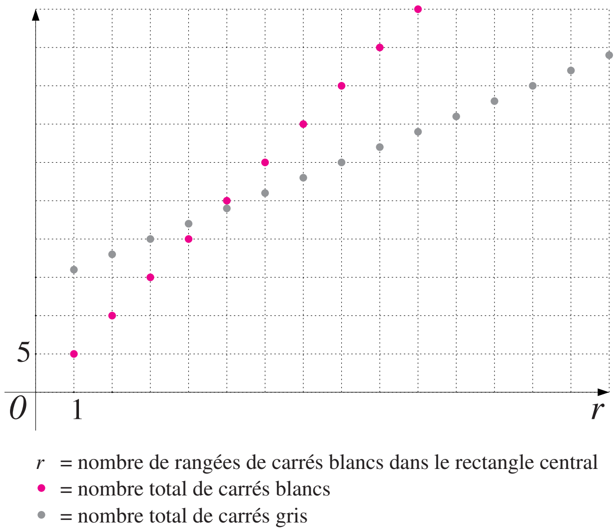


Fig. 17

Pour le cinquième tapis, les nombres de carrés blancs et gris sont très proches, c'est le va-et-vient entre le tableau et le graphique qui lève le doute et permet de conclure que ces nombres ne sont jamais égaux.

1. Les graphiques 16 et 17 ne sont pas orthonormés pour des raisons de mise en page.

Le fait de ne pas trouver de point commun poussera peut-être encore plus les élèves à relier les points, avec l'idée de rechercher le point d'intersection des deux droites supports des points. Il leur faudra comprendre que ce point d'intersection ne fournit pas de solution au problème puisqu'il ne correspond pas à un nombre entier de rangées. Notons que cela correspond au fait que le point d'intersection n'est pas un nœud du quadrillage dans un repère orthonormé.

Dans chacun des deux problèmes, l'alignement des points peut être mis en relation avec les accroissements constants [2] chaque fois qu'on avance de 1 sur l'axe des abscisses, le nombre de carrés gris augmente de 2 et le nombre de carrés blancs augmente de 3 ou de 5.

2.6.2 Algébrisation

L'enseignant peut décider de poursuivre l'activité afin d'illustrer l'efficacité de l'algèbre pour modéliser une situation et résoudre un problème.

Comme dans le cas de la carpette carrée, on peut faire rechercher par les élèves une règle de calcul pour déterminer directement le nombre de carrés blancs ou gris de n'importe quel tapis de trois (ou de cinq) carrés blancs de large, si on connaît r, le nombre de rangées de carrés blancs du rectangle intérieur.

Problème I

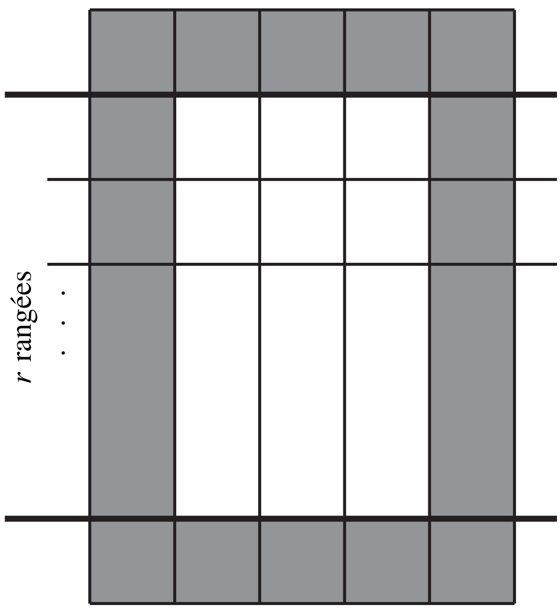


Fig. 18

Si on désigne par r le nombre de rangées de trois carrés blancs dans le rectangle central, on construit les formules suivantes en s'appuyant sur la figure 18 :

le nombre total de carrés blancs : $B = 3 \times r$,

le nombre total de carrés gris : $G = 2 \times r + 2 \times 5$.

Si on cherche ensuite une valeur de r pour laquelle $B = G$, on obtient l'équation

$$3 \times r = 2 \times r + 10,$$

dont la solution $r = 10$ correspond bien à celle obtenue dans le tableau, et qu'on voit sur le graphique.

Cette dernière démarche montre l'intérêt de la mise en équation pour résoudre un problème de ce type.

2. Voir à ce sujet CREM 2002, Des grandeurs aux espaces vectoriels, chap. 5.

Problème II

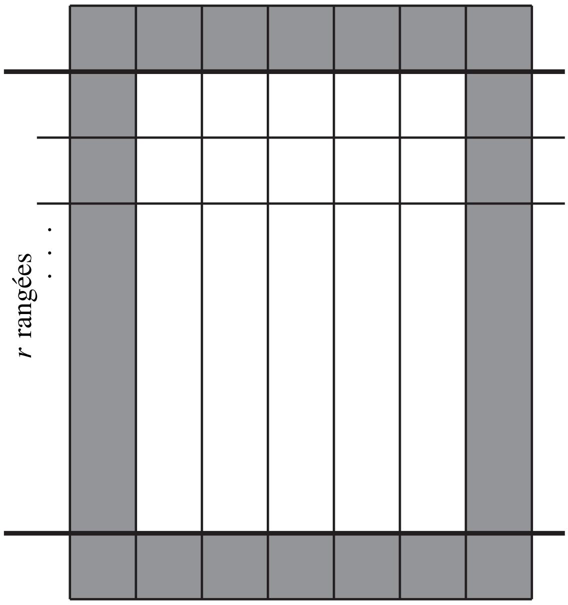


Fig. 19

Un schéma comme celui de la figure 19, où r désigne le nombre de rangées de cinq carrés blancs dans le rectangle central, permet d'obtenir :

le nombre de carrés blancs : $B = 5 \times r$,

le nombre de carrés gris : $G = 2 \times r + 2 \times 7$.

Si on cherche, à partir des formules obtenues plus haut, la valeur de r pour laquelle le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs, on écrit l'équation

$$5 \times r = 2 \times r + 14,$$

et on obtient la solution $r = \dfrac{14}{3}$ qui n'est pas une solution acceptable car cela ne correspond pas à un nombre entier de rangées.

Ceci est à mettre en relation avec le fait qu'il n'y a pas de point commun aux deux ensembles de points alignés de la figure 17. Cette valeur $r = \frac{14}{3}$ est l'abscisse du point d'intersection des deux droites support des points correspondant au problème.

On conclut que le problème II n'a pas de solution, aucun tapis n'a autant de carrés blancs que de gris.

2.7 Synthèse

Deux nouvelles stratégies ont été mises en place :
- à partir des tableaux de nombres, représenter graphiquement le nombre de carrés gris et le nombre de carrés blancs et observer sur le graphique s'il existe un nombre de rangées qui rend ces nombres égaux ;
- établir des formules pour calculer directement le nombre de carrés gris et de carrés blancs en fonction du nombre de rangées de carrés blancs dans la partie centrale, puis résoudre une équation.

Quelques considérations à propos des équations méritent d'être discutées avec les élèves.
- Le premier problème des carpettes rectangulaires débouche sur une équation du premier degré qui a une solution dans les nombres naturels, c'est celle qui ressort des dessins et tableaux de nombres, elle est aussi fournie par le point commun aux deux ensembles de points alignés.
- Le deuxième problème des carpettes rectangulaires débouche sur une équation du premier degré dont la solution n'est pas acceptable. Les dessins, tableaux de nombres et graphiques ont montré que le problème n'avait pas de solution.
  Comme on recherche un nombre entier de carrés blancs et gris, c'est le fait que la solution de l'équation n'est pas un entier positif qui confirme que le problème n'a pas de solution.

— Le problème des carpettes carrées débouche sur une équation du second degré que les élèves du début du secondaire ne sont pas capables de résoudre. L'absence de solution au problème n'est pas due au fait que l'équation est du second degré ($b^2 = 4b + 4$) mais au fait que cette équation n'admet pas de solution entière positive, comme dans le second problème des carpettes rectangulaires.

Les deux problèmes des tapis rectangulaires illustrent l'efficacité de l'algèbre ; ils montrent tout l'intérêt d'être capable de mettre le problème en équation pour trouver la solution.

— Si le problème a une (ou plusieurs) solution(s), la résolution de l'équation permet de la trouver sans passer par l'inventaire des cas possibles.

— Si le problème n'a pas de solution, l'équation permet de s'en assurer, c'est particulièrement intéressant dans les cas où l'inventaire exhaustif des cas possibles est fastidieux ou impossible.

Prolongement possible

On peut revenir sur le problème des carpettes carrées et proposer aux élèves de représenter sur un graphique les nombres de carrés gris et de carrés blancs (en fonction du nombre de carrés blancs sur un côté du carré intérieur par exemple). On verra alors apparaître un ensemble de points alignés (les nombres de carrés gris) et un ensemble de points disposés sur une parabole (les nombres de carrés blancs). L'absence de solution au problème des carpettes carrées est à mettre en relation avec le fait qu'il n'y a pas de point commun à ces deux ensembles de points sur le graphique.

D'une manière générale, la diversité des graphiques obtenus en changeant le choix des axes permet des observations intéressantes.

Vers où cela va-t-il ?

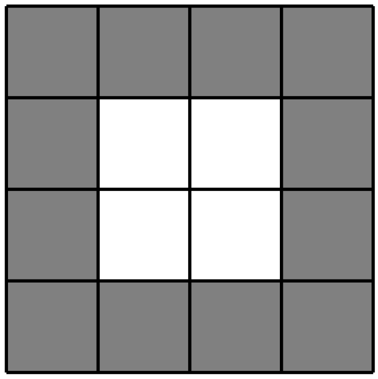
Les intersections de graphiques, notamment l'intersection d'une droite et d'une parabole qui sera formellement abordée en quatrième.

Carpettes carrées

On commercialise un nouveau type de carpette carrée, constituée de petits carrés identiques : des gris sur les bords et des blancs à l'intérieur. La plus grande carpette a 10 carrés gris par côté.

Est-il possible d'avoir une carpette de ce type composée du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

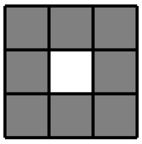
Expliquez votre démarche.



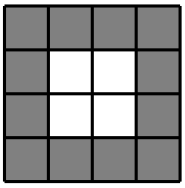
Exemple de carpette

Problème « Carpettes carrées » – Exploitation et synthèse (1)

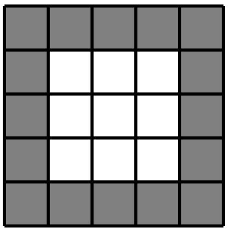
Dessins de tous les cas possibles



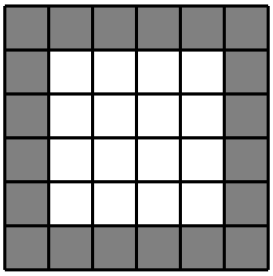
... blanc
... gris



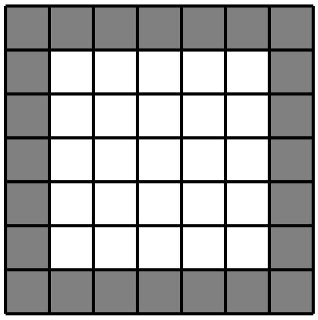
... blancs
... gris



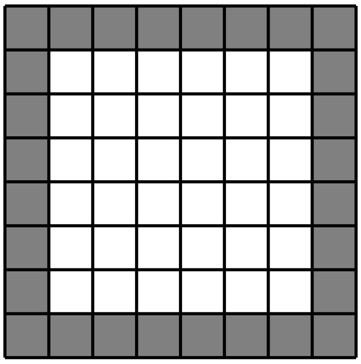
... blancs
... gris



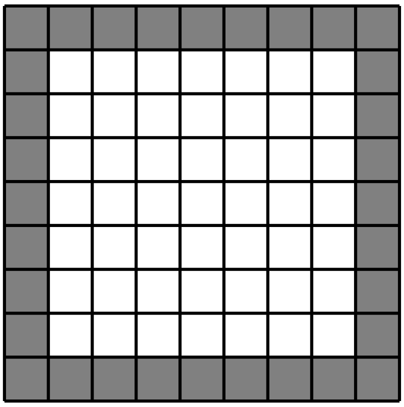
... blancs
... gris



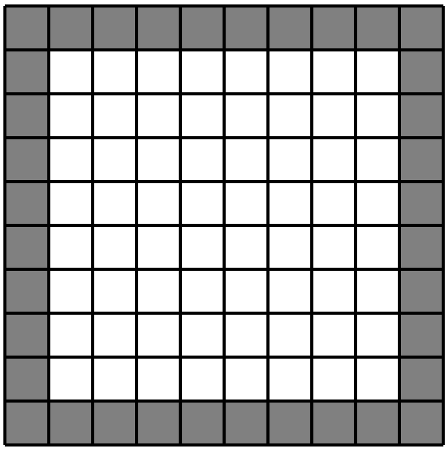
... blancs
... gris



... blancs
... gris



... blancs
... gris



... blancs
... gris

Résultats dans un tableau – de la plus petite carpette à la plus grande

Complétez le tableau suivant en utilisant vos propres données et/ou celles des autres groupes.

Nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc	Nombre de carrés sur un côté de la carpette	Nombre total de carrés de la carpette	Nombre total de carrés blancs de la carpette	Nombre total de carrés gris de la carpette	Écart

Problème « Carpettes carrées » – Exploitation et synthèse (2)

1. Liens entre des colonnes

- Comparer le nombre de carrés sur un côté de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc.
- Comparer le nombre total de carrés de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de la carpette.
- Comparer le nombre de carrés blancs à l'intérieur de la carpette et le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc.
- Établir un lien entre le nombre total de carrés gris, le nombre total de carrés de la carpette et le nombre total de carrés blancs à l'intérieur de la carpette.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. Liens au sein d'une colonne

Comment évolue
- le nombre de carrés sur un côté de l'intérieur blanc de la carpette ?
- le nombre de carrés sur un bord de la carpette ?
- la suite des nombres de carrés blancs intérieurs ? la suite des nombres de carrés de la carpette entière ?
- le nombre de carrés gris de la bordure ?

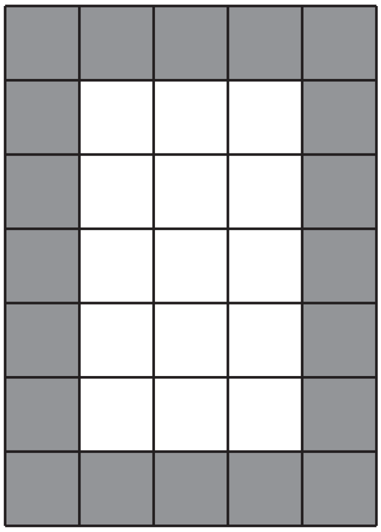
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Tapis rectangulaires (Problème I)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

Sachant que ces tapis ont tous trois carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.
Expliquez votre démarche.

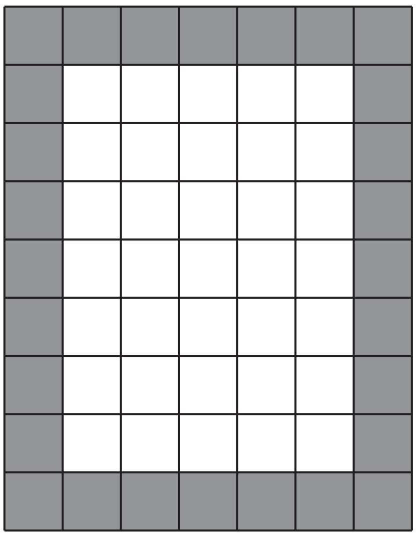


Tapis rectangulaires (Problème II)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

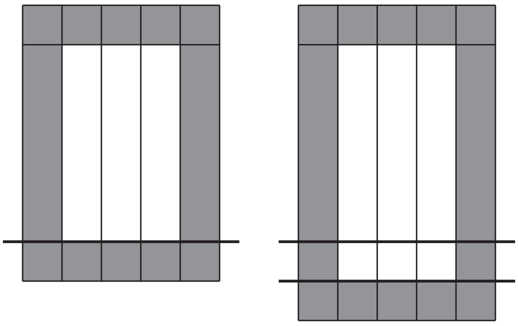
Sachant que ces tapis ont tous cinq carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.
Expliquez votre démarche.



Tapis rectangulaires : dessins et tableaux

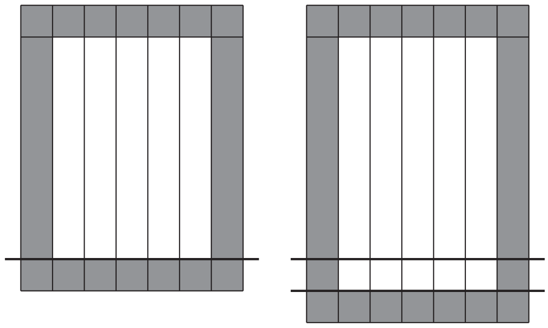
Problème I



Pour chaque rangée supplémentaire,

le nombre de carrés blancs augmente de ...
le nombre de carrés gris augmente de ...

Problème II



Pour chaque rangée supplémentaire,

le nombre de carrés blancs augmente de ...
le nombre de carrés gris augmente de ...

Résultats dans un tableau à partir du tapis le plus petit :

Trois carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc	Nombre total de carrés blancs	Nombre total de carrés gris
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Conclusion :

....
....
....
....
....

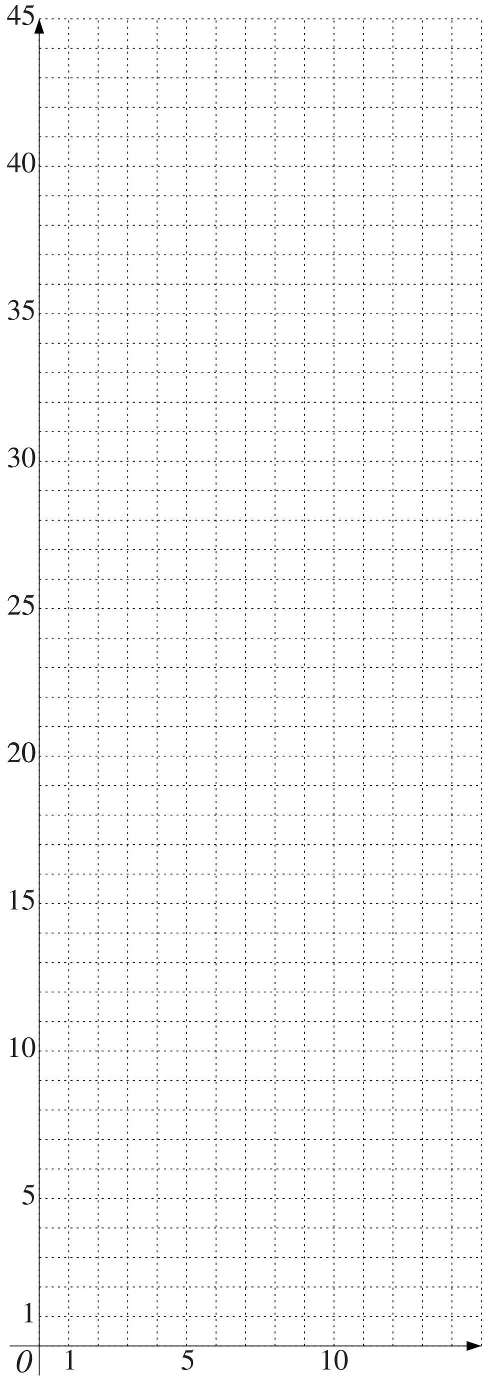
Cinq carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc	Nombre total de carrés blancs	Nombre total de carrés gris
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Conclusion :

....
....
....
....
....

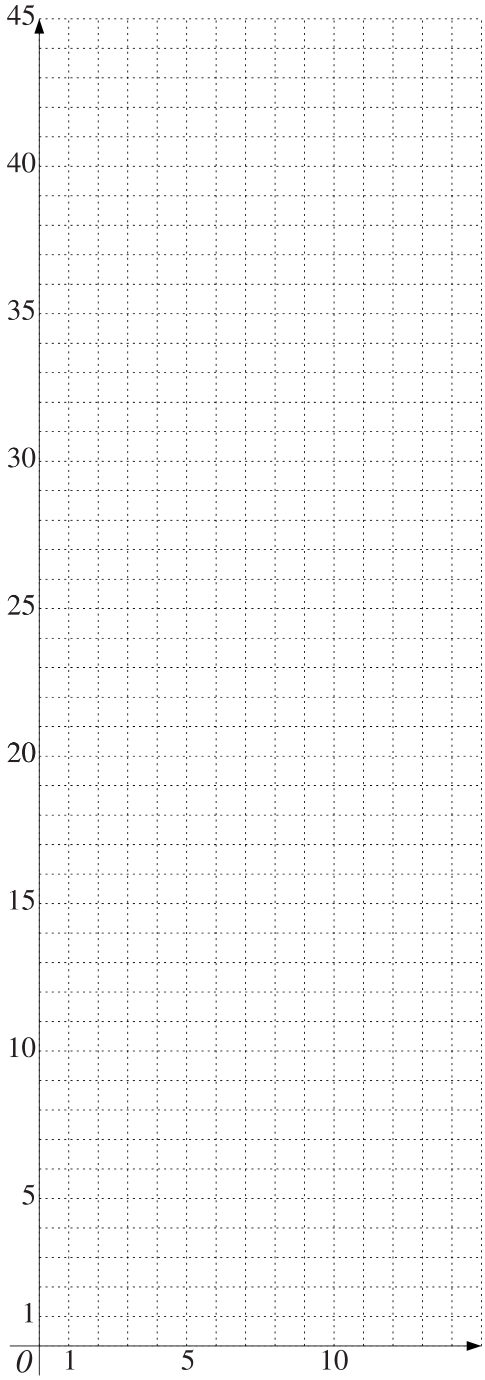
Tapis rectangulaires : représentations graphiques

Problème I



Conclusion : ....
....
....

Problème II



Conclusion : ....
....
....