Une modalité de formation pour faire évoluer les pratiques sur le raisonnement et la preuve.

Un exemple de développement de la pensée algébrique par l'argumentation.

Claire Piolti-Lamorthe
Marie-Line Gardes
Université de Lyon

PREMaTT · PAE21 PR3 · ICÉ · Lyon 1 · espe École supérieure du professorat et de l'éducation Académie de Lyon · Université de Lyon · ISC Marc Jeannerod

Objectifs de l’atelier

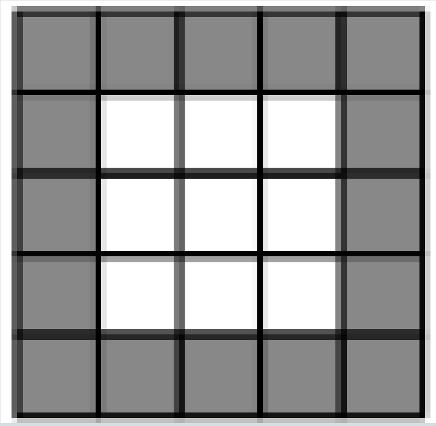
- ✓ Analyser une activité de Pattern proposée du Cycle 3 au Cycle 4
  - ✓ Potentialités du point de vue du raisonnement et de la validation
  - ✓ Aspect longitudinal
- ✓ Vivre un dispositif de formation : le Jigsaw

Cadre Théorique

Pensée algébrique (Radford, 2014)

- ✓ **Indétermination** : le problème implique des nombres non connus (inconnues, variables, etc.).
- ✓ **Dénotation** : les nombres indéterminés sont nommés ou symbolisés de différentes manières : à l'aide du code alphanumérique, mais aussi à l'aide du langage naturel, des gestes ou de signes non conventionnels.
- ✓ **Analycité** : les quantités indéterminées sont traitées comme si elles étaient connues (par exemple, réaliser des opérations).

Un exemple



- ✓ **Indétermination** : une variable – le nombre de carreaux sur le côté du carré
- ✓ **Dénotation** : cette variable peut (devra) être nommée, symbolisée sous différentes formes
- ✓ **Analycité** : formuler une généralité à partir de cette variable

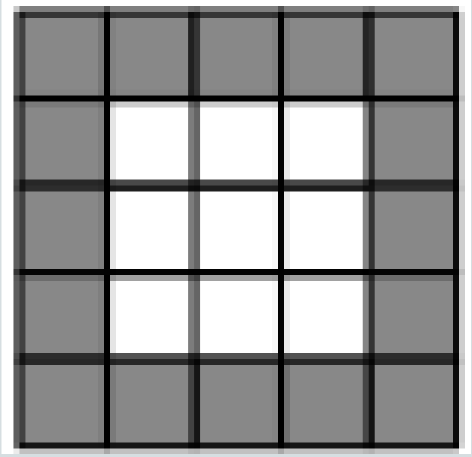
Calculer le nombre de carreaux hachurés en fonction de cette variable

Trois types de raisonnements dans la généralisation issue du contexte de suites arithmétiques

(Radford, 2006, 2008)

- L' **induction naïve** consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu ou en identifiant de manière incorrecte la structure du motif.
- La **généralisation arithmétique** consiste à identifier un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite. Il s'agit de l'accroissement constant entre les termes consécutifs, c'est-à-dire de la mise en évidence de la «raison». Cette généralisation permet de prédire les cas proches.
- La **généralisation algébrique** consiste à identifier une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite qu'il peut ensuite généraliser pour tous les termes de la suite.

Un exemple

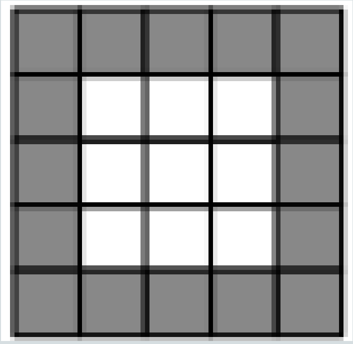


Induction naïve

SI
Carré de 3 carrés blancs de côté → 16 carrés grisés
ALORS
Carré de 6 carrés blancs de côté → 32 carrés grisés

Un exemple

Généralisation arithmétique

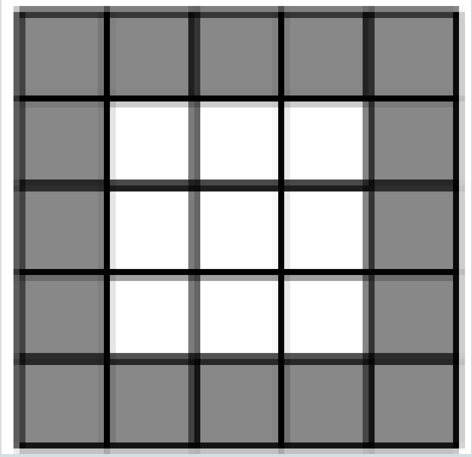


pour un carré de 2 carrés blancs de côté il faut 12 carrés grisés

pour un carré de 3 carrés blancs de côté il faut 16 carrés grisés

donc, pour un carré de 4 carrés blancs de côté il en faudra 4 de plus, à savoir 20 carrés grisés

Un exemple



Généralisation algébrique

Si *n* est le nombre de carrés blancs sur le côté

Repérer que le nombre de carrés blancs sur le côté est repris quatre fois sur le contour des carrés grisés auxquels il faudra ajouter les quatre carrés des coins, soit $(4n + 4)$

L’activité des Pyramides

- ✓ Conçue collaborativement par des professeurs des écoles, de collège et des chercheurs dans le cadre de la recherche Prematt
- ✓ Proposée du CM1 à la 3ème sous la même forme en variant la temporalité

JIGSAW

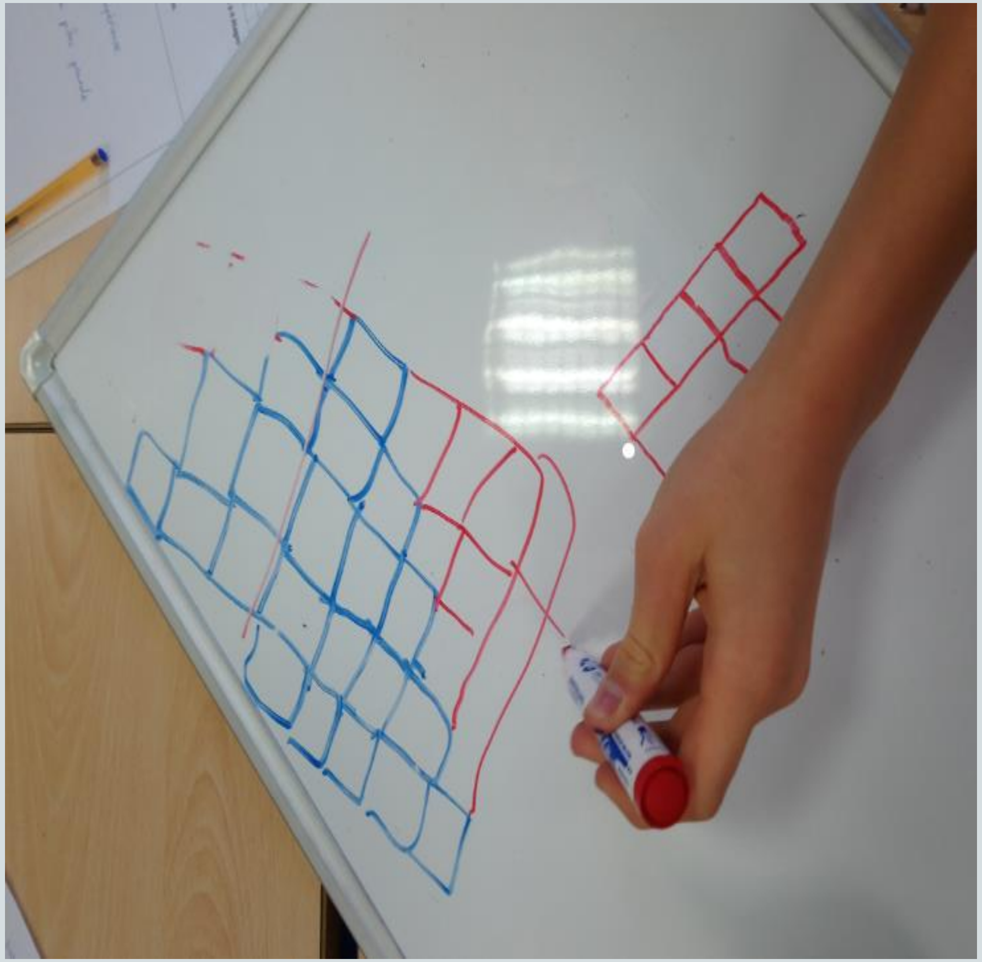
- <u>Temps 1</u> : Formez des groupes de 3, les « Groupes d'Apprentissage » et prenez connaissance de la finalité de votre groupe
- <u>Temps 2</u> : Chaque membre du groupe tire au sort une pièce du puzzle et rejoint le « Groupe d'Expert » correspondant
- <u>Temps 3</u> : Chaque expert retourne dans son Groupe d'Apprentissage et présente les conclusions de son groupe d'experts
- <u>Temps 4</u> : Chaque groupe d'apprentissage finalise sa production

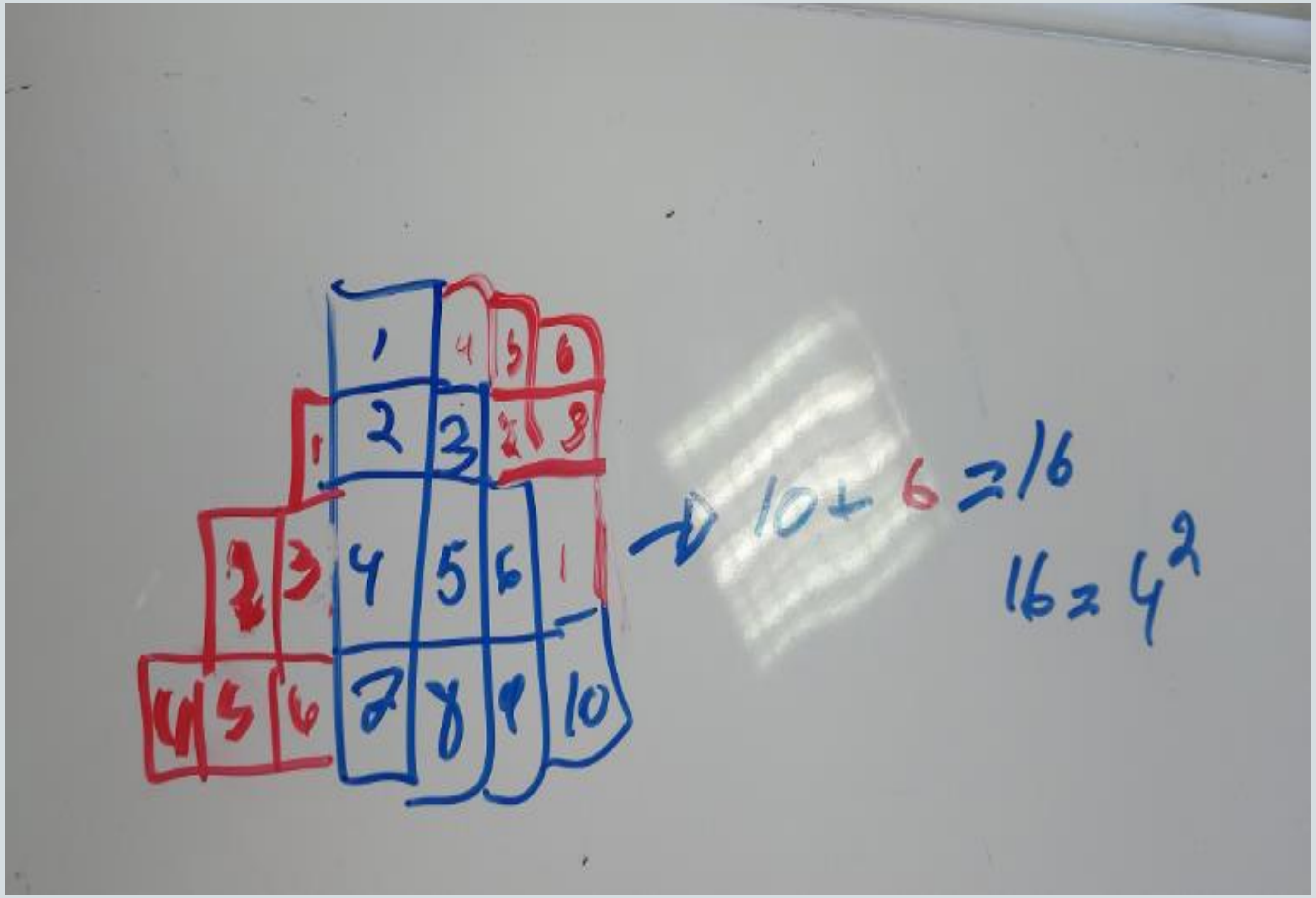
Groupe d’experts

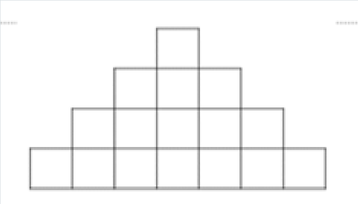
Table Expert 1 : début de Cycle 3

Table Expert 2 : charnière Cycle 3 / cycle 4

Table Expert 3 : fin de cycle 4




10 + 6 = 16
16 = 4²



Pyramide à 4 étages

Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

Indétermination : une variable – le nombre d’étage de la pyramide

Dénotation : cette variable peut (devra) être nommée, symbolisée sous différentes formes

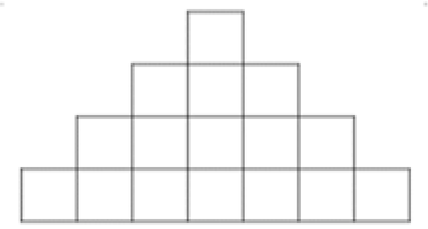
Analycité : formuler une généralité à partir de cette variable

Calculer le nombre de carrés d’une pyramide en fonction de cette variable

Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

Induction naïve

pour 10
on fait (19 x 10) - (45 x 2) = 100
pour 100
on fait (190 x 100) - (450 x 2~~0~~) = 1000



Pyramide à 4 étages

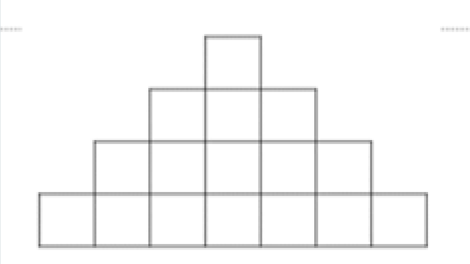
Pyramide à 3 étages 9 carrés

5 étage à 25 carrés
2) Pour 10 la base est de 19 donc +17+15+11+9+7+5+3+1 = 100
3) Pour 100 10x10=100 donc 19x10 = 190+170+150+110 ,9+70+50+30+10 = 1000

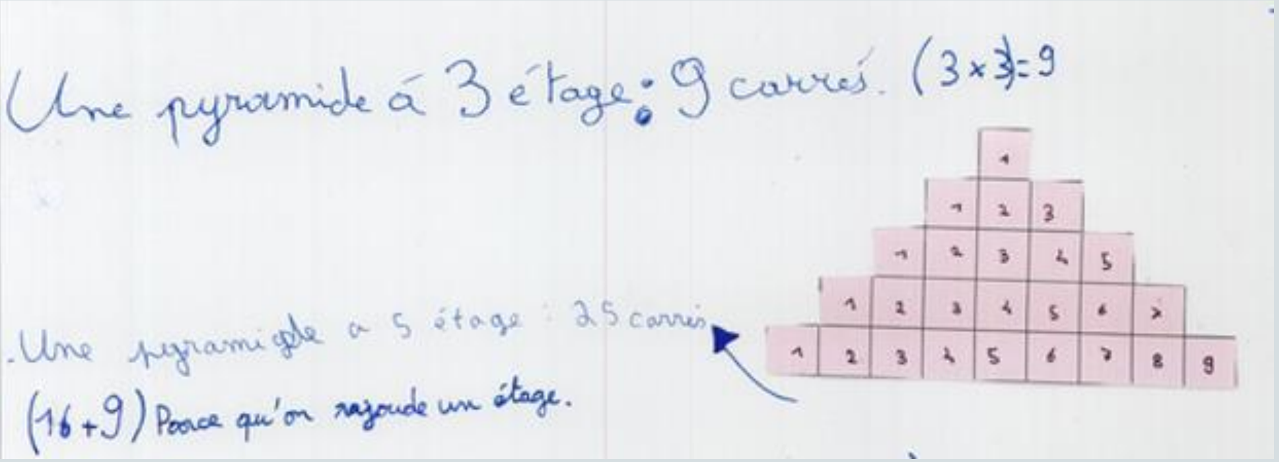
Les premiers nombres sont obtenus par comptage

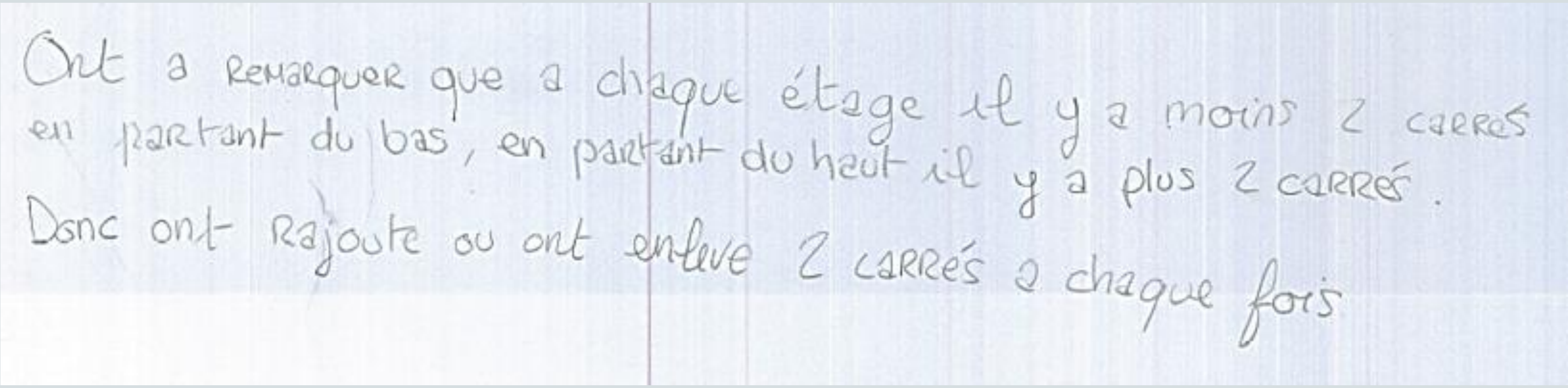
Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

Généralisation arithmétique



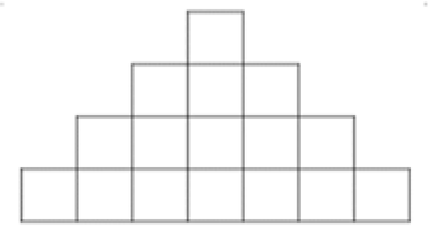
Pyramide à 4 étages





Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

Généralisation algébrique



Pyramide à 4 étages

$10 \times 10 = 100$

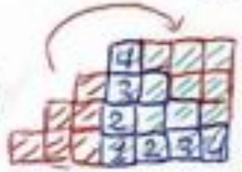
↑ ela même

5) 10 000 pour 100 on multipli le nombre d'étages par lui même.

④ Multiplier le nombre de carrés de la collone la plus grande avec la moitié d'un des côtés de la base,

schéma :

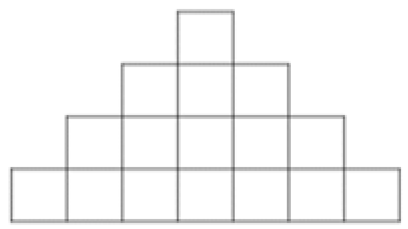
de l'autre côté calculé côté ->



Aire de 16 carrés = 4 x 4

Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

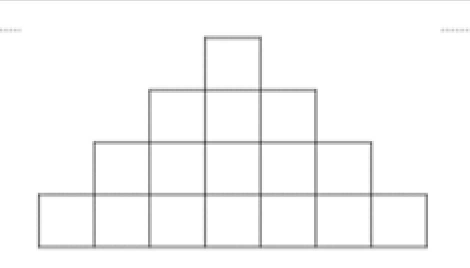
- **Favorise un raisonnement visant à faire identifier et exprimer des régularités**



Pyramide à 4 étages

→ Via l'identification d'une indéterminée (une variable) puis son utilisation pour un calcul (100 étages) et la justification à apporter.

→ Via l'expression de généralités produites et de leurs justifications dans un langage tout d'abord non conventionnel et qui tend à devenir de plus en plus conventionnel au fil des nécessités de l'activité



Pyramide à 4 étages

Potentiel de cette situation pour la pensée algébrique

Aspect longitudinal

Régularités observées

Contextualisées Sans généralisation	Et exprimées en contexte Généralisation sans formalisme	Et exprimées pour généraliser algébriquement

Début Cycle 3 → Cycle 3/Cycle 4 → Fin Cycle 4

Illustrer Expliquer	Et parfois pour justifier	Justifier, valider Exemple générique

Traces écrites des élèves

Raisonnement, validation, preuve

Typologie des preuves (Balacheff, 1982, 1987)

Un outil pour analyser des preuves produites par les élèves dans des situations de validation

2 catégories de preuves

- ✓ **Des preuves pragmatiques** : preuves intimement liées à l'action et à l'expérience.
- ✓ **Des preuves intellectuelles** : preuves qui montrent que leurs auteurs ont pris du recul par rapport à l'action. La démonstration est une preuve intellectuelle particulière.

Raisonnement, validation, preuve

Induction naïve

Généralisation arithmétique

Généralisation algébrique

Empirisme naïf

Expérience cruciale

Exemple générique

Expérience mentale

Calcul sur les énoncés

Démonstration

Des preuves pragmatiques : preuves intimement liées à l'action et à l'expérience.

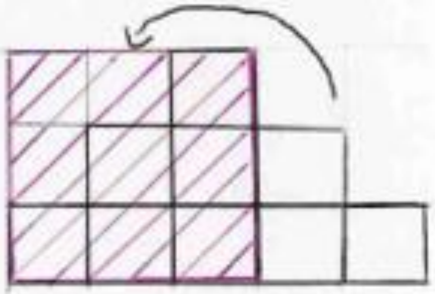
Des preuves intellectuelles : preuves qui montrent que leurs auteurs ont pris du recul par rapport à l'action.

c) ~~Compte~~ Multiplier le nombre d'étage par ~~les~~ nombres d'étage $5 \times 5 = 25$

2) A 10 étages sa sera 100 carrés ($10 \times 10 = 100$)

Conjecture:

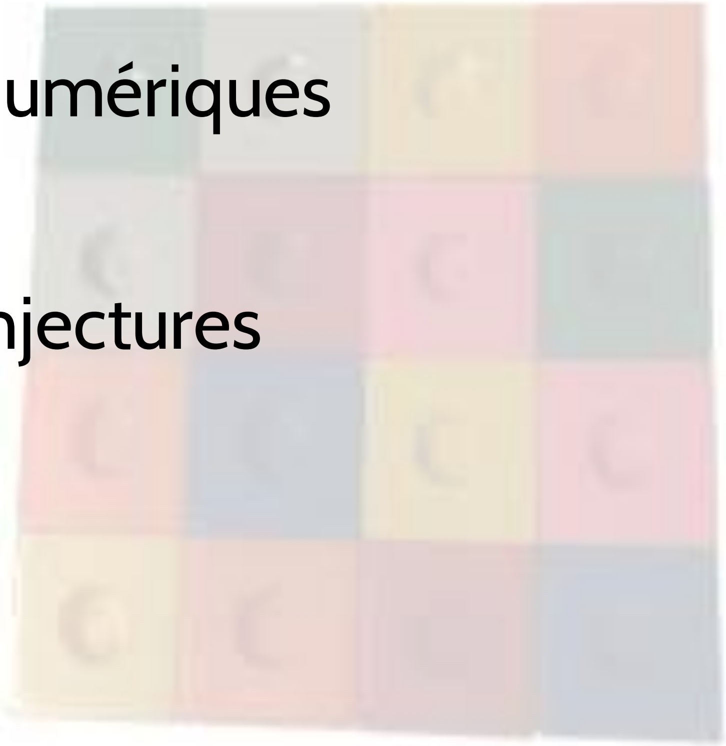
Nous avons établis une conjecture, cette dernière est : x (nombres d'étages) donc la conjecture est x^2. Nous l'expliquons par la forme de la pyramide qui peut former un carré.



verticale ensuite combien il y en a dans une ligne horizotale ensuite multiplie les deux nombres

Une nouvelle perspective : les séries

- ✓ Chercher des régularités numériques
- ✓ Proposer / justifier des conjectures



Les séries quelques exemples

2 patterns et trouver la suivante

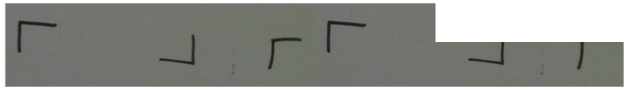
BBVVBBVV ?

NRJNRJ ?

Δ□○◊Δ□○◊ ?

Δ□□○◊◊Δ□□○◊◊

1-2-10-20-100-1-2-1



a) Compléter la suite de nom

25	...	49	...	...

25 37 49 73 97 145

12 12 même écart

+24 +24 ×2 −1

et pour 49 ✳ 49 = 2×25−1.

Ness

$25 = 5\times5$ $36 = 6\times6$

$49 = 7\times7$

Ilian : suite de

25 36 4

5^2 6^2

Andréa

25 24 49 48 97 96

+24 25−1 49−1 97−1 49+48

b) 6 621 appartient-il à la suite :

12	15	18	21...	24...	27...

+3

6621 est dans la table car

$6000 = 3\times2000$

$600 = 3\times200$

$21 = 3\times7$

$6621 = 3\times(2207)$

6621 est dans la table de 3

Il s'écrit 3×2207

Critère de divisibilité par 3 :

6621 est dans la table de 3 car

$6+6+2+1 = 15$

et 15 est dans la table de 3

Et 1924 ?

Non → la calculatrice donne un nombre à virgule en resultat de 1924 : 3

Non → $1+9+2+4 = 16$ et 16 n'est pas dans la table de 3

Non → 1924 | 3 ; 12, 04, 1 ; 641

Une nouvelle perspective : les séries

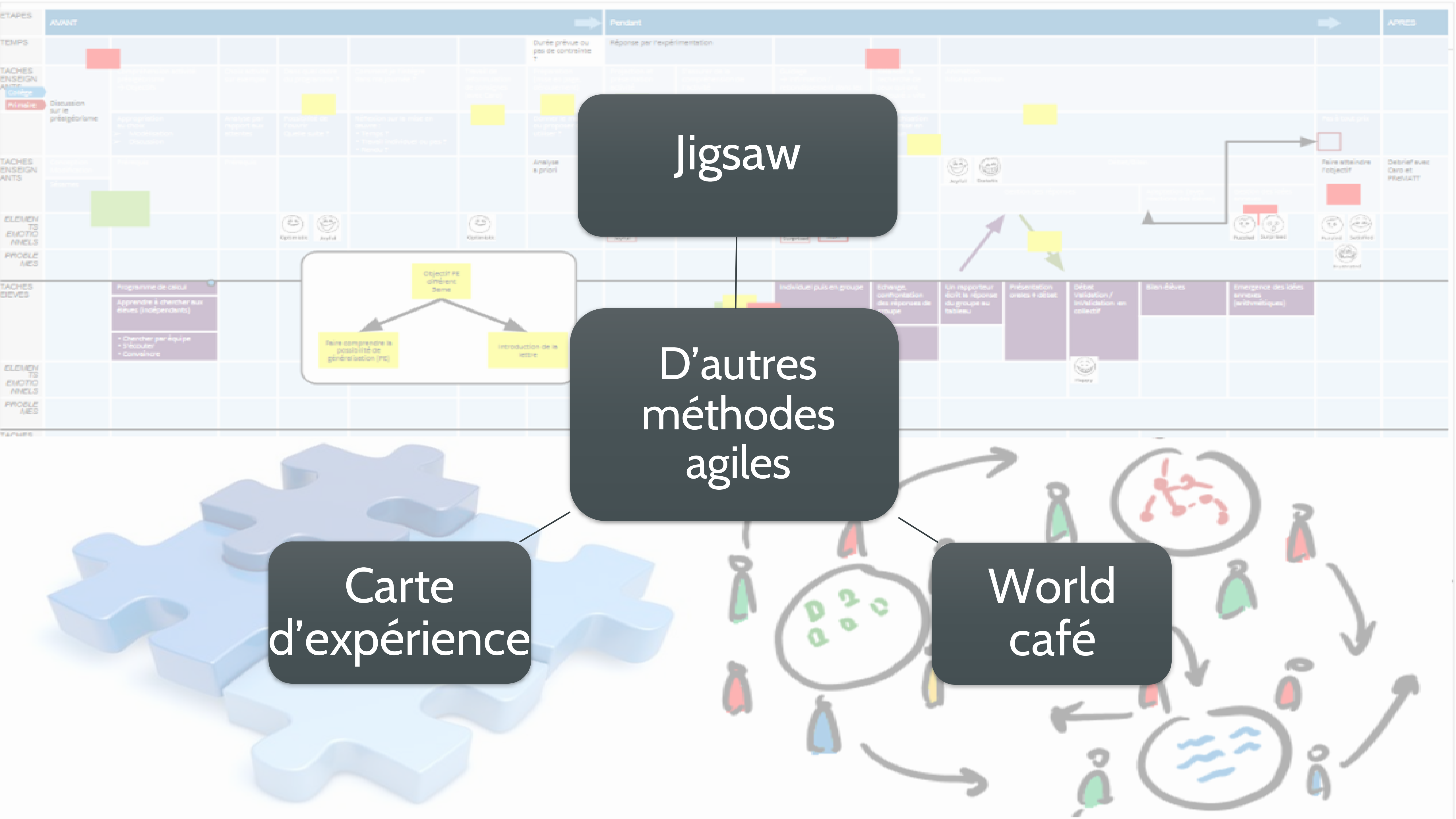
- ✓ Différents registres
- ✓ Deux types de séries :
  - ✓ Séries / Patterns périodiques ⇒ Algorithmique
  - ✓ Séries / Patterns agissant sur les structures et les relations ⇒ Pensée algébrique

Une nouvelle perspective : les séries

« Notre étude met en lumière la nécessité d’inscrire dans les manuels de primaire des types de tâches actuellement peu présents, comme du calcul réfléchi pour produire et interpréter des écritures équivalentes d’un même nombre, ou de la production d’expressions numériques en résolution de problèmes, notamment de généralisation. » (Grugeon-Allys, Pilet, 2019)

JIGSAW

Votre retour sur le dispositif


Jigsaw
D’autres méthodes agiles
Carte d’expérience
World café

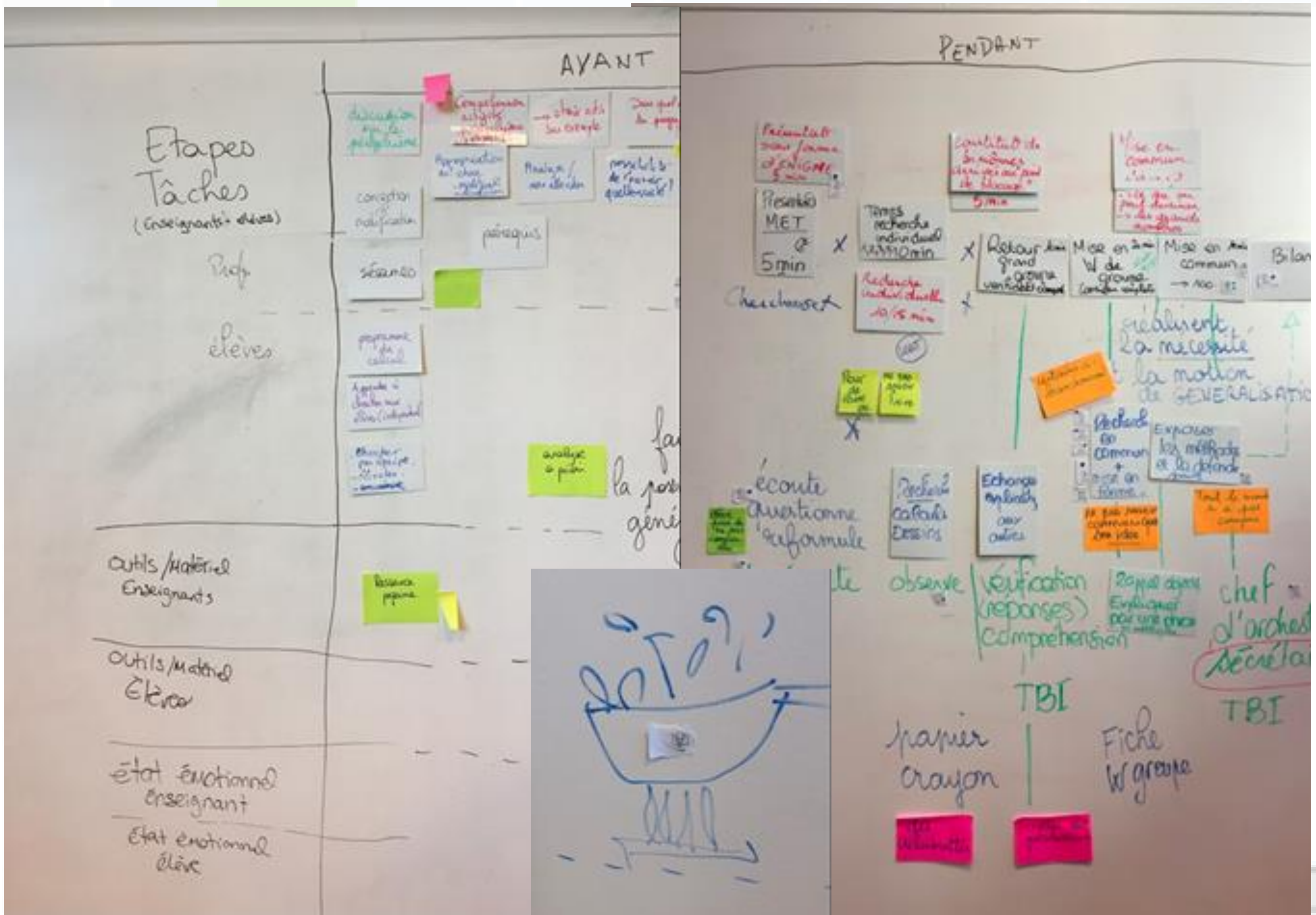
En bref

JIGSAW

- √En formation et dans nos classes
- √Autour d’une notion, d’un problème scindable en sous-parties disjointes
- √Répartir le travail / gain de temps (étude de corpus différents dans les groupes d’experts)
- √Responsabiliser chaque membre du groupe d’apprentissage qui devient l’expert d’une des facettes.

Description

CARTE D'EXPÉRIENCE



- ✓Autour d'un projet vécu ou à concevoir
- ✓Un cadre d'analyse pensé a priori
- ✓Un récit temporel
- ✓Une prise de distance ciblant les outils, les contributeurs, l'état émotionnel et des points d'appui et/ou de frictions

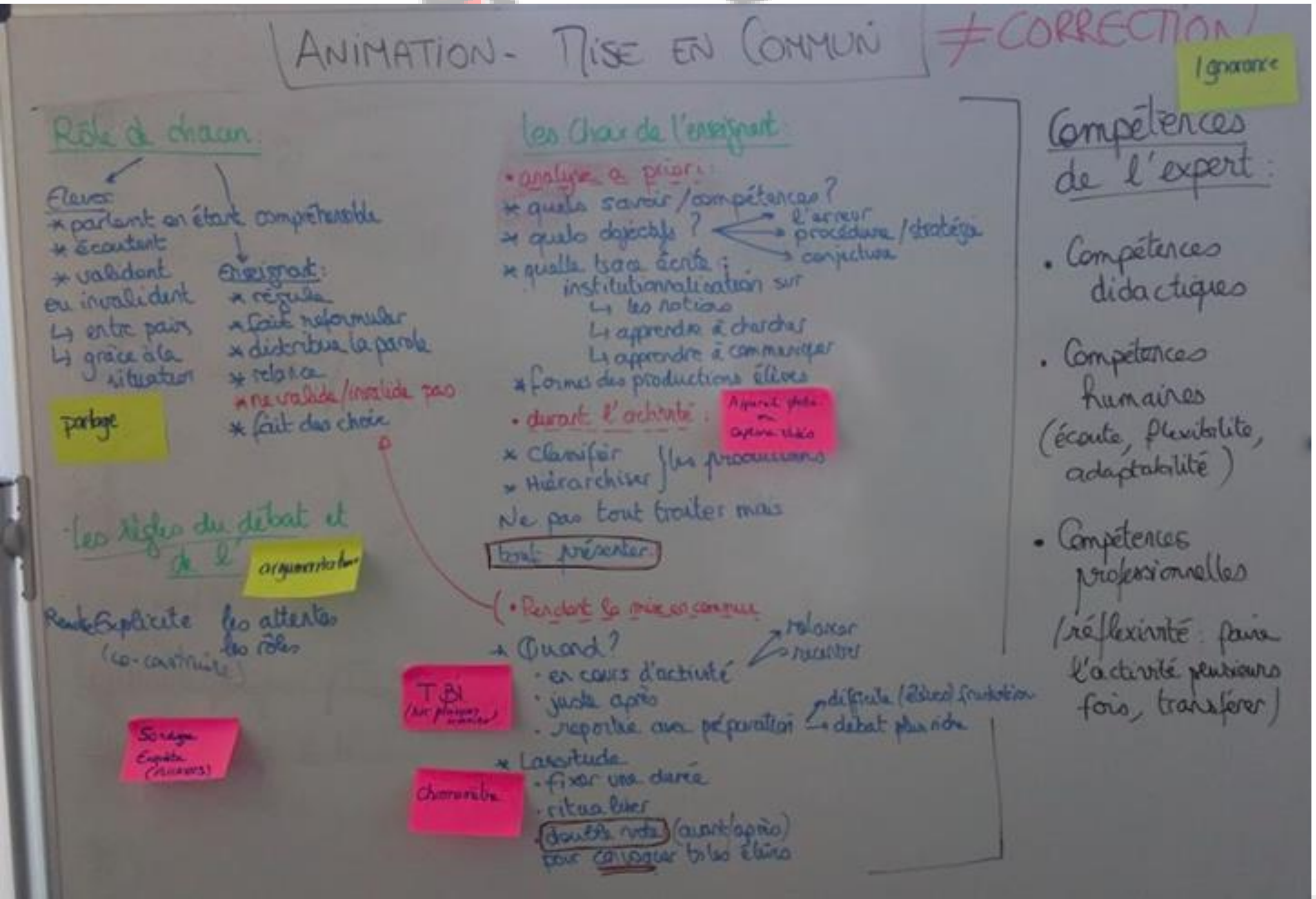
En bref

CARTE D’EXPÉRIENCE

- √ Un outil qui nous semble utile à long terme mais que nous avons eu du mal à mettre en place
- √ Fort potentiel réflexif
- √ Chronophage

Description

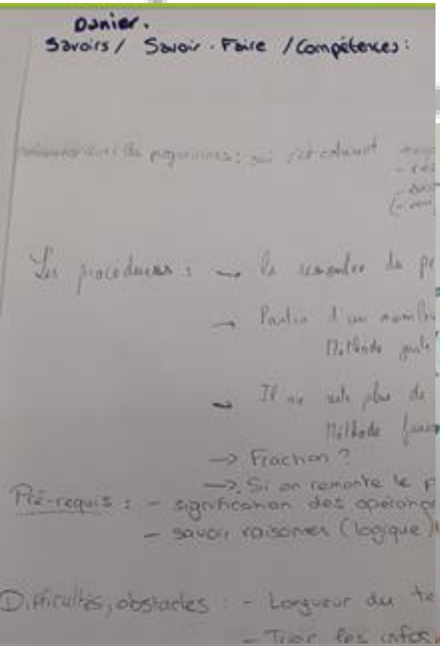
WORLD CAFÉ

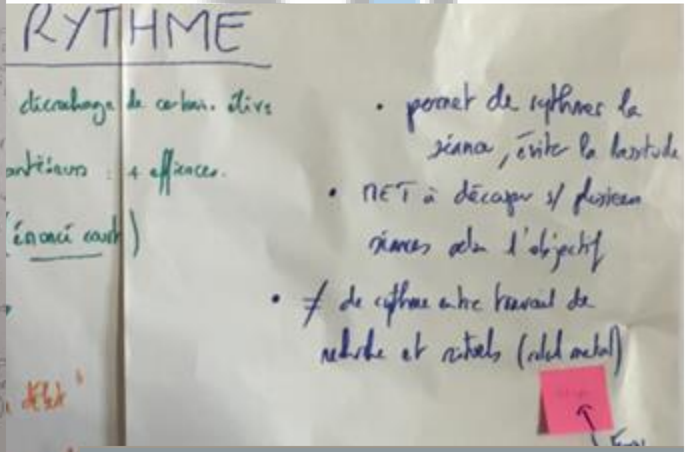


- ✓ Autant de thèmes (points de frictions) que de tableaux
- ✓ Un système de rotation entre les tableaux pour les participants
- ✓ Différents rôles :
  - ✓ Des participants qui réfléchissent successivement aux différents thèmes
  - ✓ Un expert qui résume aux nouveaux arrivants l'état de la réflexion autour du thème puis présente la synthèse
  - ✓ L'animateur qui relance la réflexion avec des mots clés ou des demandes supplémentaires

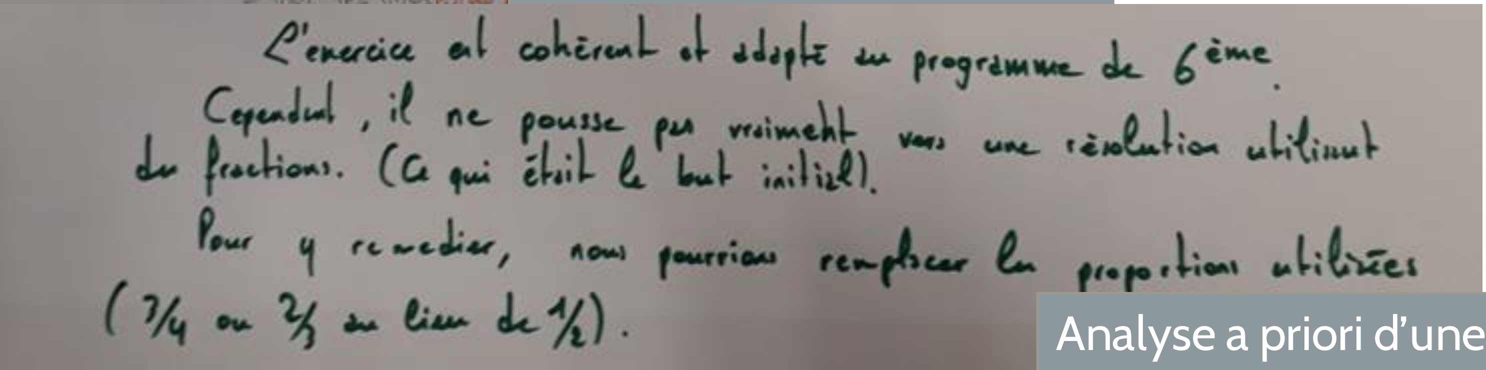
WORLD CAFÉ

- Incontournable en formation initiale et continue
- Possibilité d'adapter les modalités (avec ou sans expert, temporalité, relance …)
- Donne du rythme à la réflexion
- Implique tous les participants dans chaque thème → intérêt pour l'exposé des synthèses





En formation continue



Analyse a priori d'une activité à

En bref

WORLD CAFÉ

- √Explorer différents sujets
- √En groupe

- √Permettre à chacun de s’exprimer sur tous les sujets en évitant les redites et produire une synthèse.

Références

- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educaional Studies*, vol. 18/2.
- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherche en didactique des mathématiques, 3/3*.
- Grugeon-Allys, B. & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre?. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106–130. https://doi.org/10.7202/1055730ar
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*. *40*(1), 83-96.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *In* S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz et A. Mendez (dir.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA) (p. 2-21). Merida: Universidad Pedagogica Nacional.
- Vlassis, J., Demonty, I. & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20(3), 131–155. https://doi.org/10.7202/1055731ar

MERCI !

Claire Piolti-Lamorthe

claire.piolti-lamorthe@univ-lyon1.fr

Marie-Line Gardes

marie-line.gardes@univ-lyon1.fr