Corfem 2019, atelier Perrin's-Pinvidic

Quelques exercices supplémentaires

.

Les exercices qui suivent sont rédigés pour les professeurs. Il appartient à chacun d'en faire une rédaction pour ses élèves suivant l'usage qu'il veut en faire. L'absence de signalement indique un exercice élémentaire, le signe ¶ un exercice plus difficile. Pour tous ces exercices on essaiera de proposer plusieurs approches.

1 Avec les aires

1.1 *Exercice.* **(Le lemme du chevron)** Soit ABC un triangle, M un point du plan, distinct de A. On suppose que (AM) coupe (BC) en A', distinct de C. Montrer qu'on a $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

1.2 *Exercice.* Montrer le concours des médianes du triangle (on utilisera le lemme du chevron).

1.3 *Exercice.* **(Menelaus et Céva)** ¶ Soit ABC un triangle.

1) Une droite ne passant pas par les sommets coupe respectivement (BC), (CA), (AB) en A', B', C'. Montrer l'égalité $\dfrac{A'B}{A'C} \times \dfrac{B'C}{B'A} \times \dfrac{C'A}{C'B} = 1$ (Menelaus).

2) On considère A', B', C' situés respectivement sur (BC), (CA), (AB) et on suppose que les droites (AA'), (BB'), $CC')$ sont concourantes. Montrer qu'on a la même relation (Céva).

3) ¶¶ Étudier les réciproques.

1.4 *Exercice.* **(Les tiers)** ¶¶ Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ au tiers du côté de B, C, A. Les droites (AI) et (BJ), (BJ) et (CK), (CK) et (AI) se coupent respectivement en E, F, G. Comparer les aires des triangles ABC et EFG.

2 Des exercices faciles

2.1 *Exercice.* Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, M un point de $[AB]$. La droite (OM) coupe $[CD]$ en N. Montrer qu'on a $OM = ON$.

2.2 *Exercice.* **(Triangle isocèle)**

On considère un triangle ABC isocèle en A (c'est-à-dire vérifiant $AB = AC$).

1) Montrer que les angles en B et C sont égaux.

2) Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que M est aussi le pied de la hauteur issue de A.

3) La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en I. Que peut-on dire du point I ?

4) Soit H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que H est le milieu de $[BC]$.

2.3 *Exercice.* **(Cerf-volant)**

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $AB = BC$ et $AD = DC$. On note H le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. *(On rappelle que les diagonales d'un quadrilatère $ABCD$ se coupent si et seulement s'il est convexe.)* Montrer que (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

3 Justifier des propriétés connues

3.1 *Exercice.* **(Médiatrice)**

On définit la médiatrice Δ du segment $[AB]$ comme la droite perpendiculaire à (AB) en le milieu I du segment $[AB]$.

a) Soit M un point de Δ. Montrer qu'on a $MA = MB$.

b) Inversement, si un point M du plan vérifie $MA = MB$, montrer qu'il est sur Δ.

3.2 *Exercice.* **(Bissectrice)**

a) Soit M un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. On le projette orthogonalement sur les côtés de l'angle en P sur $[OA)$ et Q sur $[OB)$. Montrer qu'on a $MP = MQ$.

b) ¶ Étudier la réciproque.

c) **Application :** Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

3.3 *Exercice.* **(Le triangle rectangle et son demi-cercle)**

a) Soit ABC un triangle inscrit dans le (demi-)cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que ABC est rectangle en A.

b) Montrer la réciproque : soit ABC un triangle rectangle en A, alors il est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse (ou, si O est le milieu de $[BC]$, on a $OA = OB = OC$).

(On peut donner au moins trois démonstrations : par l'absurde, en utilisant la droite des milieux qui joint O au milieu M de $[AC]$, en utilisant la symétrie centrale et les propriétés des rectangles.)

c) **Une application** Construire (à la règle et au compas) un triangle ABC dont la base $[BC]$ est donnée et dont on connaît les longueurs des hauteurs BB' et CC'.

3.4 *Exercice.* **(Parallélogramme)**

On définit un parallélogramme comme un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés opposés ((AB) et (CD) d'une part, (BC) et (DA) de l'autre) sont parallèles. Il est nécessairement convexe, donc ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O. On se propose de montrer toutes les propriétés usuelles en utilisant les triangles isométriques. On suppose connues les propriétés des angles alternes-internes.

1) Montrer qu'on a $AB = CD$ et $AD = BC$ et qu'on a les égalités d'angles $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$.

2) Montrer que O est milieu de $[AC]$ et $[BD]$.

3) Montrer les réciproques suivantes :

• Si $ABCD$ a ses côtés opposés égaux c'est un parallélogramme.

• Si les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, $ABCD$ est un parallélogramme.

• Si $ABCD$ est convexe et si les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et égaux, $ABCD$ est un parallélogramme.

4 Quelques autres problèmes

4.1 *Exercice.* ¶ Soit ABC un triangle isocèle en A. La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On porte sur la droite (AD), de l'autre côté de A par rapport à D, un point E qui vérifie $AE = BD$. Que peut-on dire du triangle CDE ?

4.2 *Exercice.* Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $ABCD$, les triangles équilatéraux ADP et ABQ. Que peut-on dire du triangle PQC ?

4.3 *Exercice.* **(Le pentagone)**

On rappelle trois caractérisations de régularité pour un pentagone convexe $ABCDE$:

• Les côtés sont égaux ($AB = BC = CD = DE = EA$) et les angles sont égaux ($\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEA} = \widehat{EAB}$).

• Les côtés sont égaux et les points A, B, C, D, E sont sur un même cercle.

• Les points A, B, C, D, E sont sur un même cercle de centre O et les angles au centre ($\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOA}$) sont égaux.

0) Un pentagone convexe $ABCDE$ dont les diagonales sont égales est-il régulier ?

1) Et si l'on suppose en plus qu'on a $AB = BC = CD = DE = EA$?

¶ 2) Et si l'on suppose en plus que A, B, C, D, E sont sur un même cercle ?

¶ 3) Et si l'on suppose en plus que les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$, $\widehat{EAB}$ sont égaux ?

4.4 *Exercice.* **(Le papillon)**

On considère un quadrilatère croisé $ABCD$ dont les côtés $[BC]$ et $[AD]$ se coupent en O. On suppose qu'on a $AB = CD$ et $AD = BC$. Montrer qu'on a $OA = OC$ et $OB = OD$.

4.5 *Exercice.* ¶ **(Les triangles rectangles isocèles)**

Soit ABC un triangle, D le milieu de $[AB]$, E celui de $[AC]$ et M celui de $[BC]$.

On construit, sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ et à l'extérieur du triangle, deux triangles PAB et QAC rectangles isocèles en P et Q.

Montrer qu'on a $PM = MQ$ et que l'angle $\widehat{PMQ}$ est droit.

5 Similitude

5.1 *Exercice.* Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A.

1) Montrer les formules suivantes : $AH^2 = BH \times CH$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times CB$. (On pourra utiliser les triangles semblables ou la trigonométrie ou le théorème de Pythagore voire le produit scalaire).

2) Si l'on n'a pas utilisé Pythagore, le démontrer en utilisant les relations précédentes.

3) On considère un rectangle R de longueur a et de largeur b. Construire à la règle et au compas un carré K ayant la même aire que R.

5.2 *Exercice.* On considère un segment $[AB]$ et deux points C, D situés respectivement sur les perpendiculaires à (AB) en A et B, du même côté de (AB). Peut-on placer un point M sur le segment $[AB]$ de sorte que les triangles ACM et BDM soient semblables. Si oui, donner toutes les possibilités, puis les construire.

5.3 *Exercice.* Soit $ABCD$ un rectangle, $M \in [AD]$, H le projeté orthogonal de C sur $[BM]$. Les triangles rectangles BAM et BHC sont-ils semblables ? ¶ Même question avec les deux triangles précédents ainsi que CHM et CDM.

5.4 *Exercice.* ¶ *Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC dont les angles en A, B, C sont respectivement égaux à $36, 72$ et 72 degrés et d'en déduire une construction du pentagone régulier.*

Soit ABC un triangle dont les angles en A, B, C sont respectivement égaux à $36, 72$ et 72 degrés. On pose $a = BC$ et $b = AB = AC$.

1) On construit $D \in [AC]$ tel que $AD = BD$.

a) Calculer les angles de ABD, puis ceux de BDC. En déduire la longueur BD en fonction de a.

b) Montrer que les triangles ABC et BCD sont semblables. Montrer l'égalité $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{a}{b}$.

2) On considère un pentagone (convexe) régulier $P := ABCDE$.

a) Montrer que tous les angles de P valent 108 degrés. (On pourra partager P en les trois triangles ABE, BED et BDC.)

b) Calculer les angles de ABE, puis ceux de BDE et montrer que ce triangle a des angles de $36°$ (en B) et de $72°$ (en D et E).

c) On pose $a = AB$ et $b = DB$. Montrer l'égalité $\dfrac{b}{a} - 1 = \dfrac{a}{b}$.

3) On se propose de construire deux longueurs a, b qui vérifient $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{a}{b}$, c'est-à-dire $a^2 = b(b-a)$, ou encore $b^2 = a(a+b)$.

On considère un segment $[AB]$ et on construit C tel que BAC soit rectangle en A avec $AC = \frac{1}{2}AB$. On porte sur la demi-droite $[CA)$ un point D tel que $CB = CD$ puis $E \in [AB]$ tel que $AD = AE$. On pose $a = AD = AE$ et $b = AB$.

Montrer qu'on a $CD^2 - CA^2 = AD(CD + CA) = AB^2$ et en déduire l'égalité voulue.

4) Construire à la règle et au compas un pentagone régulier.