CORFEM 2019
Strasbourg 11-12 juin 2019

Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques

Viviane DURAND-GUERRIER
IMAG, CNRS, Univ. Montpellier, IREM de Montpellier
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

L'introduction dans le programme de seconde de démonstrations à étudier est une invitation à réfléchir aux possibilités que cela ouvre pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques.

Dans cet exposé je vais examiner cette question dans le cadre de la rubrique « Nombres et calculs ».

Je présenterai tout d'abord une synthèse d'un travail que j'ai conduit avec Denis Tanguay sur la question de la contribution de la preuve à la conceptualisation en mathématiques.

Puis j'illustrerai cette perspective dans le cas de la racine carrée de 2.

En préliminaire, je vais commenter quelques extraits des nouveaux programmes de seconde.

Préliminaire

Extraits des nouveaux programmes de mathématiques de seconde générale et technologique

Annexe au B.O.

Organisation du programme

Le programme s'organise en cinq grandes parties : « Nombres et calculs », « Géométrie », « Fonctions », « Statistiques et probabilités » et « Algorithmique et programmation ». [...] Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoirs à la maison, etc.

Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires. Ils peuvent permettre une différenciation pédagogique.

Nombres et calculs – Objectifs (1)

Cette partie prolonge le thème « Nombres et calculs » du cycle 4 avec pour objectifs de :

- approfondir la connaissance des divers types et ensembles de nombres ;
- développer la pratique du calcul numérique ou algébrique ;
- travailler sur les inégalités ;
- résoudre des problèmes modélisés par des équations ou inéquations se ramenant au premier degré.

Nombres et calculs – Objectifs (2)

Les élèves rencontrent les nombres réels comme abscisses des points d’une droite graduée, et plus largement comme nombres permettant de mesurer des grandeurs. Ils les comparent, ils apprennent qu’il existe des nombres irrationnels, les encadrent par des nombres décimaux ou rationnels. Ils comprennent que calculatrices et logiciels font des calculs approchés. En liaison avec un approfondissement de l’étude des multiples et diviseurs, ils consolident la pratique du calcul sur les fractions.

Nombres et calculs – Manipuler les nombres réels (1)

Au cycle 4, les élèves ont étudié les inégalités pour comparer des valeurs numériques. La notion d’intervalle, présentée comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités, est nouvelle.

La notation de la valeur absolue est introduite pour exprimer la distance entre deux nombres réels et caractériser les intervalles de centre donné. Toute autre utilisation est hors programme.

Nombres et calculs – Manipuler les nombres réels (2)

Contenus

- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalles de $\mathbb{R}$. Notations $+\infty$ et $-\infty$.
- Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.
- Représentation de l'intervalle $[a - r , a + r]$ puis caractérisation par la condition $|x - a| \leq r$.
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π.

Nombres et calculs - Manipuler les nombres réels (3)

Capacités attendues

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d’amplitude donnée, d’un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Manipuler les nombres réels- Contenus

Démonstrations

- Le nombre rationnel 1/3 n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple d'algorithme

- Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à10^{-n}.

Approfondissements possibles

- Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

Vocabulaire ensembliste et logique (1)

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés après avoir été vus plusieurs fois en situation.

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités ou la notation E \ A.

Vocabulaire ensembliste et logique (2)

Les élèves apprennent en situation à :

- reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ;
- lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ;
- formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ;
- mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ;

Vocabulaire ensembliste et logique (3)

Les élèves apprennent en situation à :

- formuler une implication, une équivalence *logique** *(mathématique)*, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ;
- formuler la réciproque d'une implication ;
- lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles ∀ et ∃ sont hors programme).

Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.

* *Deux propositions du calcul des prédicats sont logiquement équivalentes si et seulement si elles ont la même valeur de vérité pour toute interprétation de leurs lettres dans tout univers non vide (Quine 1950). Exemple une implication universellement quantifiée et sa contraposée sont logiquement équivalentes.*

Travailler sur les preuves pour favoriser la conceptualisation.
Le cas de la complétude de l'ensemble des réels

(Durand-Guerrier & Tanguay, 2018)

Hypothèses de travail

L’analyse de preuve fait partie du travail du mathématicien, du professeur et de l’élève. Sa conduite met en évidence le rôle des objets et le fait que les aspects logiques et mathématiques sont étroitement enchevêtrés (Weber 2007).

L’analyse de preuve remplit trois fonctions principales

-contrôler la validité de la preuve.

-comprendre la stratégie de preuve mise en oeuvre par l’auteur

-contribuer à l’appropriation du domaine mathématique concerné et à la spécificité des preuves de ce domaine en lien avec le type d’objets en jeu : leur définition, les propriétés et les relations afférentes (Durand-Guerrier & Arsac 2009).

Dans Durand-Guerrier & Tanguay (2018), nous avons considéré les apports de l’analyse des preuves de la complétude de l’ensemble des nombres réels selon la construction considérée.

R comme extension de Q (Dedekind 1872)
Analogie avec la droite numérique - Nombre réel comme opérant une coupure de Q – création des irrationnels pour opérer les coupures non opérées par un rationnel –ensemble formé de la réunion des rationnels et des irrationnels - prolongement de l'ordre sur Q – ensemble totalement ordonné.
Dedekind prouve que dans ce nouvel ensemble, toute coupure de l'ensemble est opérée par un élément de l'ensemble – ce nouvel ensemble est complet. Un nombre réel est la borne supérieure d'une coupure qu'il opère.

Cette construction favorise la compréhension de la complétude comme passage d'un ensemble dense en lui même avec des lacunes vers un ensemble continu (Durand-Guerrier 2016)

R comme extension de Q (Rudin 1976***,*** Lelong Ferrand & Arnaudies 1977***)***
Nombre réel comme classe d'équivalence des suites de Cauchy de rationnels par la relation d'équivalence « *u* est en relation avec *v* si et seulement si la suite *u* - *v* converge vers 0 » - nombres irrationnels comme classes d'équivalence de suites de Cauchy ne convergeant pas dans Q. La preuve de la complétude (à savoir toute suite de Cauchy de nombres réels converge dans R) est complexe et nécessite de jongler entre différents types d'objets : éléments de $\mathbb{Q}$, suites de Cauchy de nombres rationnels, nombres réels comme classes d'équivalences.
Un pas crucial est le fait que toute suite de Cauchy de nombres réels peut être approximée par des suites de Cauchy de nombres rationnels, mettant en valeur l'idée d'approximation successives.

Les nombres réels comme expansions décimales illimitées

R comme extension de Q (Perrin 2005)
Nombre réel comme expansion décimale illimitée propre - nombres irrationnels comme expansions décimales illimitées non périodiques – Plongement de Q dans R - D comme sous ensemble de Q. Définition axiomatique : il existe un unique corps ordonné archimédien dans lequel toute paire de suites adjacentes est composée de 2 suites convergentes de même limite.
[En annexe] construction de R par les expansions décimales illimitées – ordre lexicographique – densité de D dans R – structure de corps ordonné archimédien – preuve que R satisfait la propriété de convergence des suites adjacentes (ce qui n'est pas le cas de Q et à fortiori de D).
Approche pragmatique de la construction par les suites de Cauchy

Les nombres réels comme expansions décimales illimitées

D et Q comme sous ensemble de R (Burril 1967)

Ensemble des nombres réels positifs comme extension de N : un nombre réel est une expansion décimale illimitée – Burril munit l'ensemble ainsi défini de l'ordre lexicographique et montre que l'ensemble obtenu est totalement ordonné et satisfait la propriété « toute partie minorée non vide admet une borne inférieure ».

D est défini comme la réunion dénombrable des ensembles formés des expansions décimales finies ayant au plus un nombre fini donné de décimales non nulles.

Un nombre réel est la borne supérieure de l'ensemble de ses approximations par défaut à 10^{-k} près.

Approche pragmatique de la construction de Dedekind.

Eléments de conclusion (1)

Les principaux résultats de cette recherche sont:

1/ La confirmation de l'impact du choix de définition sur les preuves que l'on peut produire (type d'objets engagés, stratégies pertinentes, niveau de complexité, etc..)

2/ La nécessité pour comprendre une preuve/démonstration d'approfondir la connaissance des objets en jeu.

3/ La définition des nombres réels comme *expansions décimales illimitées* montre qu'il est nécessaire dans certains cas de regarder non seulement la définition des objets, mais aussi le processus de construction : celui de Burril met au cœur les propriétés de l'ordre, tandis que celle de Perrin met au cœur la densité de D dans R et les approximations décimales.

Eléments de conclusion (2)

Une hypothèse fondée sur ce travail est que pour une appropriation adéquate des nombres réels il est nécessaire de considérer les trois points de vue.
Dans les années 70, la recommandation de Lelong-Ferrand était de proposer la construction par les approximations décimales au lycée en Terminales C et de faire la construction par les suites de Cauchy en première année d'université.

Pour la classe de seconde, une première approche des nombres réels par les approximations décimales semble être le plus accessible, ce qui revient à mettre au cœur de la construction des nombres réels à ce niveau l'*idécimalité* au sens de Bronner (1997) plutôt que l'*irrationalité*.

.

Pistes pour travailler sur les preuves afin de favoriser la conceptualisation des notions en jeu.
L'exemple de racine carrée de 2

La démonstration de l’irrationalité de la racine carrée de 2 est une des preuves qui sont au programme de la classe de seconde à partir de la prochaine rentrée.

Comme indiqué plus haut la preuve visée est celle de l’irrationalité de racine 2.

Une question qui se pose : L’ensemble des nombres réels est-il considéré comme déjà là ou a-t-on le projet de le construire.

Nous allons examiner successivement les deux points de vue.

Dans l'esprit du programme, les nombres réels sont les abscisses des points d'une droite graduée, et réciproquement l'abscisse de tout point de la droite correspond à un nombre rée.

Sur une telle droite, on peut placer avec les instruments:

- Des entiers
- Des décimaux avec 1 ou 2 chiffres après la virgule.
- Sur une calculatrice en divisant le pas par 10 et en zoomant, on peut placer des nombres décimaux avec autant de chiffres que l'on veut (en droit sinon en fait).
- Des nombres rationnels (Théorème de Thales)
- Des nombres dont le carré est un entier qui n'est pas un carré parfait (exemple : diagonale du carré de coté 1 construit sur le segment unitaire – diagonale du rectangle de largeur 1 et de longueur 6 etc.).

Par le calcul, on sait déjà que :

- certains nombres rationnels (fractions) sont des nombres décimaux. On peut les écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (fractions décimales).
- d'autres ne sont pas des nombres décimaux (la division en se termine pas – constat empirique) – exemple 1/3.

Preuve que 1/3 est un idécimal

Preuve 1 - On peut prouver que 1/3 est un idécimal en considérant l'algorithme habituel de la division euclidienne dans la numération de position en base 10 adapté pour les décimaux: à partir de l'étape 1, reste et quotient sont invariants. On a un processus itératif potentiellement infini.

Preuve que 1/3 est un idécimal

Preuve 2 - On peut prouver également qu'il est un idécimal car on en peut pas trouver une entier qui multiplié à 3 donne 10, ni aucune puissance de 10

Première exploration

$10 = 3x3 + 1$

$10^2 = 3^2x3^2 + 2x3x3 + 1 = 3\ (3^3 + 6) + 1 = 3\ x\ 33 + 1$

$10^3 = 3^2x33^2 + 3x3x33 + 1 = 3x\ 333 + 1$

$10^2 = 10x10 = 10x\ (3x3 + 1) = 30x3 + 10 = 30x3 + 3x3 + 1.$

$10^2 = 3x33 + 1$, $10^3 = 3x333 + 1$

Conjecture : $10^n = 3X333....3 + 1$ (n fois)

Preuve : par élément générique ou par récurrence.

Preuve 3 - Numération de position – preuve par l'absurde

3.1. On suppose que 1/3 est un nombre décimal

On a 1/3 = d d'où 3d = 1. Pas de solution entière à l'équation. d n'est pas un entier. Soit a la décimale non nulle la plus à droite. 3a est un nombre non nul non multiple de 10. La décimale la plus à droite de 3d est non nulle ; 3d est un nombre décimal non entier, donc 3d est différent de 1. On a une contradiction. On rejette l'hypothèse

3.2 . On suppose que 1/3 est un nombre décimal – il s'écrit

a/ 10^k; on suppose a n'est pas un multiple de 10, sinon, on simplifie. 3d = 3a/10^k et 3a n'est pas un multiple de 10. La suite est la même.

Approfondissements – encadrer un nombre rationnel entre deux décimaux – Chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre rationnel soit un nombre décimal.

Preuve que* $\sqrt{2}$ *est un idécimal

Préliminaire.

Le carré d'un décimal non entier n'est jamais un entier.

Preuve – utilise la forme $a/10^k$

Soit a un décimal non entier. Il existe un entier n tel que $a = A/10^n$ et A non multiple de 10.

Soit n et A tels que $a = A/10^n$ et A non multiple de 10.

$A = 10q+r$ avec r élément de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A^2 = 10^2q^2 + 20\,qr + r^2$ $r^2 = 10q' + s$ avec s $\{1, 4, 5, 6, 9\}$

$a^2 = (10\,(10q^2 + 2qr + q') + s) / 10^{2n}$; d'où a^2 est un décimal non entier.

Conséquences – aucun décimal non entier n'a pour carré 2.

Résultat complémentaire – le rang de la dernière décimale non nulle est le double du rang correspondant du nombre initial.

Preuve que $\sqrt{2}$ est un idécimal

Preuve 1 - *raisonnement direct*

Conséquence du résultat précédent – aucun décimal non entier n'a pour carré 2.

Comme aucun entier n'a pour carré 2, on en déduit : aucun nombre décimal n'a pour carré 2.

On a prouver par raisonnement direct.

Pour tout x dans D, $x^2 \neq 2$.

Approfondissement – approcher le nombre réel dont le carré est 2 par les décimaux. Intervalle d'amplitude 10^{-k}

Explorer les premiers cas – utilise le fait que dans chaque D_n il y a un successeur (ce sont des ensembles discrets).

Ecrire un algorithme de balayage.

Preuve que $\sqrt{2}$ est un idécimal

Preuve 2 – Par l'absurde

On suppose qu'il existe un nombre décimal dont le carré est 2.

Notons d un tel élément

d n'est pas un entier car 2 n'est pas un carré parfait.

d est un décimal non entier donc d^2 est un décimal non entier (préliminaire)

D'où d^2 différent de 2. On a $d^2 = 2$ et d^2 différent de 2.

Ceci est contradictoire – on rejette l'hypothèse.

Forme logique (implication logique)

***S**i [si non A alors (B et non B)], **alors** A*

Généralisation possible à tous les entiers qui ne sont pas des carrés parfaits.

Preuve que √2 est un idécimal

Preuve 3 – Par contraposition.

On veut prouver

Pour tout x dans R, si $x^2 = 2$, alors x n'appartient pas à D (1)

On va prouver sa contraposée

Pour tout x dans R, si x appartient à D, alors $x^2 \neq 2$ (2)

[Soit d un nombre décimal

Exhaustion des cas

1^er cas d est un entier – $d^2 \neq 2$ car 2 n'est pas un carré parfait.

2^ème cas - d est un décimal non entier donc d^2 *est un décimal non entier (cf. préliminaire). D'où* $d^2 \neq 2$.

Forme logique

Si *((Si A alors B) et (si non A alors B)) alors B*

Conclusion $d^2 \neq 2$] On a une preuve par élément générique de (2) qui fournit une preuve de (1) (utilise l'équivalence logique d'un énoncé conditionnel et de sa contrapposée).

Preuve que $\sqrt{2}$ est un irrationnel

Une piste possible – caractériser les rationnels comme réels ayant un développement décimal périodique.

Montrer que aucun réel avec un développement périodique n'a pour carré 2. On peut essayer de prouver

Pour tout réel x, si x a un développement périodique, alors $x^2 \neq 2$ (3)

ou sa contraposée :

Pour tout réel x, si $x^2 = 2$, alors le développement de x n'est pas périodique. (4)

Problème : le nombre de périodes possibles est potentiellement infini. Considérer un élément qui vérifie les hypothèses ne met pas facilement sur la voie d'une preuve.

Preuve que $\sqrt{2}$ est un irrationnel par l'absurde

Supposons qu'il existe un nombre rationnel x non nul tel que $x^2 = 2$.

Notons r un tel élément ; r peut s'écrire comme quotient de deux entiers premiers entre eux : $r = a/b$ et PGCD $(a, b) = 1$.

$a^2 = 2b^2$ donc a^2 est un entier pair. Par suite a est un entier pair (voir ci-dessous). Notons k l'entier tel que $a = 2k$ $a^2 = 4k^2$, d'où $b^2 = 2\,k^2$; b^2 est pair donc b est pair.

Par suite PGCD (a,b) > 1. Or PGCD (a,b) = 1.

Ceci est contradictoire. On rejette l'hypothèse

Préliminaires :

Pour tout entier x, si x^2 est pair, alors x est pair (5)

Pour toute entier x, si x est impair, alors x^2 est impair (6)

N.B. On peut aussi utiliser le théorème de Gauss, ce qui permet de généraliser la preuve.

Eléments de conclusion

Travailler sur l'idécimalité de $\sqrt{2}$ permet de travailler plusieurs aspects des réels qui sont au programme de seconde (approximation décimale, encadrement). Ceci permet en particulier de travailler sur un obstacle bien identifié qui consiste à ne pas distinguer valeurs approchées et valeurs exactes. Ceci contribue potentiellement à améliorer la conceptualisation des nombres réels.

La preuve classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que nous avons donnée travaille les éléments d'arithmétique, mais ne donne pas accès aux propriétés permettant de manipuler les réels.

Les preuves proposées s'appuient sur l'idée que les nombres réels sont déjà là.

On peut aussi envisager des situations permettant de mo*ntrer que l'on a besoin de nouveaux nombres pour traiter le domaine des grandeurs. J'en présente un exemple dans ce qui suit.*

Un exemple de situation travaillée dans le groupe IREM de Perpignan permettant de travailler certaines des preuves présentées

Reprise d'une présentation faite à Dijon en Janvier 2019 – Journée commune des CII Lycées et Universités et présentée dans un atelier à Besançon en mai 2019

Un questionnement au sein du groupe IREM de Perpignan sur l'impact de la disparition d'un travail explicite sur les différents types de nombre dans les programmes de 2009.

- Comment le nombre réel qui est omniprésent au lycée (souvent de manière implicite) mais qui n'y est pas construit de manière axiomatique peut-il être perçu par un élève de lycée?

- Les conceptions des élèves vis-à vis de l'objet nombre réel font-elles obstacle à une intuition correcte du concept de nombre réel qui permette ensuite d'aborder l'apprentissage de l'analyse à l'université?

Un travail de recherche conduit par Martine Vergnac dans le cadre du Master HPDS avec un mémoire soutenu en septembre 2013

Titre : Les nombres réels au lycée et à l'entrée à l'université. Premier état des lieux et perspectives.

Motivations pour développer ce travail

Les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'approcher le concept de nombre réel. Un certain nombres d'étudiants entrant à l'université identifient la nature (le type) d'un nombre et son écriture.

L'accent dans les programmes est mis sur la résolution de problèmes: cela ouvre la possibilité de travailler avec des variables qui soient des entiers, des décimaux ou des rationnels.

Une construction du concept de nombre réel peut être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation.

Dans les programmes en cours, les activités qui favorisent cette construction sont complètement laissées à la charge des enseignants. Il est à craindre que, sans une incitation de l'institution, les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours ne dissuadent de nombreux enseignants de les proposer (Durand-Guerrier & Verganc 2013, Vergnac & Durand-Guerrier 2014, Vergnac 2016, Durand-Guerrier 2016).

Le problème initial

Etant donné un carré, construire un carré d'aire double.

Ce problème est traité dans le célèbre dialogue du Ménon de Platon. On peut introduire cette situation par un travail préliminaire sur le texte du Ménon.

L'activité proposée aux élèves

Classe de seconde

On donne aux élèves deux carrés à côtés entiers et on leur demande de créer un grand carré en utilisant entièrement ces deux carrés et en réalisant un minimum de coups de ciseaux.

Une fois le grand carré obtenu matériellement, on leur demande de prouver que la figure créée est bien un carré.

On leur demande ensuite de déterminer la mesure du côté de ce nouveau carré.

Le travail se déroule en groupe avec production d'une narration de recherche.

Les élèves peuvent utiliser les instruments de géométrie et la calculatrice.

Cette situation est classiquement utilisée en classe pour introduire la nécessité de considérer des irrationnels et pour l’introduction de la racine carrée.

La construction effective du carré d’aire double permet de garantir son existence dans le monde empirique. Le côté du nouveau carré est isométrique à la diagonale du carré initial.

Elle s’appuie sur le point de vue théorique de l’incommensurabilité de la diagonale du carré au coté du carré (que l’on peut prouver par l’antiphérèse à la manière d’Euclide). Cette situation est également pertinente pour établir l’idécimalité de la racine carrée de 2 (Tardy & Durand-Guerrier 2010).

C’est le choix fait dans l’expérimentation dont nous rendons compte ici, mise en œuvre par Pascale Boulais au Lycée Arago de Perpignan dans une classe de seconde en 2017-2018.

Bronner (1997) appelle nombre idécimal un nombre réel qui ne peut pas s’écrire avec un nombre fini de décimales.

La racine carré de 2 est un nombre idécimal car aucun nombre décimal n’a pour carré 2.

On peut déduire ce résultat de l’irrationalité de la racine carrée de 2, mais ceci peut être démontré directement.

En effet, le carré d’un nombre décimal non entier n’est jamais un entier.

Par suite, il n’existe pas de nombre décimal dont le carré soit égal à 2.

Variables didactiques

Définition : Les variables didactiques sont des variables pertinentes pour une situation donnée pour lesquelles les valeurs prises peuvent modifier les stratégies de résolutions (coût, validité, complexité) et leur hiérarchie et sur lesquelles le professeur peut agir en fonction de ses objectifs d'apprentissage (Brousseau 1998)

V1 – Faire construire ou non le carré d'aire double et prouver qu'il s'agit bien d'un carré.

Notre choix – oui, car ceci permet de garantir l'existence empirique d'un tel carré.

V2 - Donner ou non une valeur numérique pour le côté du carré.

Notre choix : donner une valeur numérique entière (7 cm).

Ne pas donner de valeur numérique nécessite d'identifier que le rapport du coté du grand carré au petit carré est un invariant égale à la racine carré de 2, ce qui rend plus complexe la dévolution du problème pour les élèves.
Donner une valeur numérique permet aux élèves de s'engager dans des méthodes variées.

V3 – Laisser ou non à disposition des élèves une règle graduée.

Notre choix – Oui, pour laisser ouverte la possibilité de discuter la distinction entre point de vue empirique et point de vue théorique.

Du point de vue empirique, il n'y a pas d'incommensurabilité de la diagonale du carré au coté du carré.

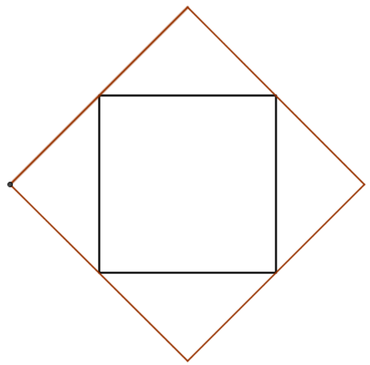
V4 – Laisser ou non l'usage de la calculatrice.

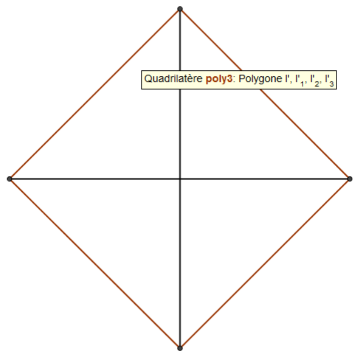
Notre choix – Oui, car c'est une entrée pertinente pour conjecturer et discuter l'idécimalité – ceci offre en outre l'occasion de revenir sur l'interprétation des résultats affichés par la calculatrice.

Eléments d'analyse a posteriori

Deux solutions géométriques, trouvées rapidement par les élèves

La seconde (découpe en deux de chacun des deux carrés) est plus fréquente que la première (découpe en quatre d'un des deux carrés)





Les démonstrations produites par les élèves pour prouver que le quadrilatère obtenu est bien un carré sont extrêmement variées :

- quatre côtès égaux et quatre angles droits
- quatre côtés égaux et des diagonales de même longueur
- des diagonales de même longueur, perpendiculaires qui se coupent en leur milieu.

Et pour prouver que trois points sont alignés, ils prouvent que l'on a un angle plat (180°) et utilisent le fait que dans un triangle rectangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux et mesurent 45°.

Ce travail permet ainsi de réactiver de nombreuses propriétés et de démarrer une réflexion sur conditions nécessaires et suffisantes.

En accord avec notre analyse a prioiri, la longueur du côté de ce carré est obtenue par différentes méthodes :

•Le théorème de Pythagore pour déterminer la mesure de la diagonale du carré initial

•La considération de l’aire totale.

•Certains élèves donnent une réponse par mesurage.

On obtient ainsi après mise en commun

•Le côté du carré mesure 10 cm

•Le côté du carré mesure 9,9 cm

Ces deux réponses proviennent des élèves ayant mesure le côté sur le carré construit.

•Le côté du carré mesure $\sqrt{98}$

•Le côté du carré mesure $7\sqrt{2}$

Ces deux réponses peuvent être proposés par les élèves utilisant le théorème de Pythagore pour calculer directement le côté du grand carré ou par ceux ayant calculé l'aire de ce grand carré.

•Le côté du carré mesure 9,89949437

Ceci correspond à l'affichage d'une calculatrice

Un débat est proposé

La considération de l'aire totale permet d'exclure les trois réponses décimales et d'établir que les deux autres réponses sont correctes.

Le débat est relancé par le professeur avec la question suivante :

Pourrait-on écrire cette réponse avec une écriture décimale ?

Elle correspond à la préoccupation forte des élèves qui refusent que les deux réponses acceptées soient les réponses définitives.

Les réponses qui émergent sont:

« oui, mais la calculatrice n'a pas mis toutes les décimales »

« oui, mais ce serait trop long »

« non, ça ne tombe pas juste ».

La professeure propose que l'on cherche s'il est possible de trouver une écriture décimale de $\sqrt{2}$.

Elle initie le raisonnement suivant :

•Supposons qu'il existe une écriture avec 20 décimales, c'est-à-dire dont la vingtième décimale ne soit pas 0. Que pourrait-on dire du carré de ce nombre ?

•Il émerge assez rapidement que ce nombre aurait 40 décimales car le carré d'un entier non nul ne se termine jamais par 0. (Les carrés parfaits ont été étudiés lors d'une activité précédente). Les élèves perçoivent la contradiction avec le fait que le carré soit 2.

•Le raisonnement peut alors être repris pour une écriture comportant n décimales.

Cela conduit à l'institutionnalisation des résultats suivants :

$\sqrt{2}$ est le nombre dont le carré est 2, on a donc $\sqrt{2}^2 = 2$

Supposons que $\sqrt{2}$ ait une écriture avec *n* décimales, la dernière n'étant pas un 0. Les carrés des entiers de 1 à 9 ne terminent jamais par 0, donc le carré de ce décimal a 2 x n décimales et la décimale la plus à droite est non nulle. Cela permet de conclure que cela ne peut pas faire 2 puisque 2 n'a aucune décimale non nulle.

Propriété

$\sqrt{2}$ n'a pas d'écriture décimale.

On écrit $\sqrt{2} \notin$ ID.

Ce raisonnement peut se faire pour tout autre entier naturel et permet d'écrire le théorème suivant :

Théorème : Pour tout entier naturel n

- si *n* est un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est un entier naturel
- si *n* n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de décimales non nulles ; ce n'est pas un nombre décimal.

Au cours de ce travail, commence à émerger l'idée que l'on pourrait se rapprocher de $\sqrt{98}$ en augmentant le nombre de décimales.

Un prolongement possible

On peut proposer aux élèves un prolongement du travail pour aller vers l'idée que l'on peut construire une suite illimitée de décimales permettant d'approcher pour n'importe quelle valeur de *k* le nombre $\sqrt{98}$ à 10^{-k} près par défaut.

On demande aux élèves de proposer des encadrements successifs de $\sqrt{98}$ entre deux décimaux ayant exactement 1, 2, 3, 4 ou 5 décimales avec des amplitudes respectives égales à 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}.

On leur propose ensuite de déduire une valeur approchée à 10^{-6} près par défaut à partir de la valeur à 10^{-5} près sans utiliser la touche « racine carrée » de la calculatrice, puis d'écrire un algorithme permettant d'itérer cette opération.

Ceci pourrait permettre d'introduire l'idée d'un processus itératif potentiellement infini.

Conclusion générale

L'introduction de démonstrations à travailler explicitement en classe de seconde ouvre des pistes pour un travail conceptuel sur les notions au programme, à condition de ne pas réduire ce travail à une manipulation d'énoncés. Il ne s'agit pas d'exclure un travail sur les énoncés mais de l'articuler avec un travail de recherche mettant en jeu objets, propriétés et relations.

Comme nous l'avons vu avec la construction de $\boldsymbol{R}$ et avec l'étude de la racine carrée de 2, la nature des objets (leur type), la manière de les définir, leurs propriétés et les relations en jeu jouent un rôle essentiel dans les stratégies possibles de preuves.

La prise en considération des objets est cruciale pour le développement des compétences liées à la preuve et pour que le travail sur les démonstrations contribuent aux développement et à l'approfondissement des notions en jeu.

Références

- Bronner, A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », Recherches en Didactique des Mathématiques, *Vol. 17, n°3, pp. 55-80, 1997*
- Castela C. (1996) La droite des réels en seconde. Point d'appui possible ou enjeu clandestin ? IREM de Rouen Num. R 108
- http://numerisation.univ-irem.fr/RO/IRO96003/IRO96003.pdf
- Durand-Guerrier V. (2018) La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. In Actes électroniques du 23° colloque de la CORFEM, Nîmes, 13-14 juin 2016.
- http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_04.pdf
- Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. Analyze of mathematical proofs. Some questions and first answers, in Proceedings of the ICMI Study Conference, Taipeh (Taiwan), 10-15 may 2009
- Durand-Guerrier, V., Tanguay, D. (2018). Working on proof as contribution to conceptualisation – The case of R-completness. In Stylianides, A.J., Harel, G. (eds) *Advances in Mathematics Education Reserach on Proof and Proving*. An international perspective. ICMe-13 Monographs. Chapter 2, pp. 19-34. Springer

- Durand-Guerrier, V. (2016) Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*, 338–361
- Pontille, M.C., Feurly-Reynaud, J., Tisseron, C. (1996) Et pourtant, ils trouvent…. Repères IREM, 24, 11-34.

http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/24_article_162.pdf

- Tardy, C., Durand-Guerrier, V. Introduction of an historical and anthropological perspective in mathematics: an example in secondary school in France. Proceedings of CERME 6, Lyon (France), 28/01/09-1er/02/09.

http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg15-12-tardy.pdf

- Vergnac, M. & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique, Petit x, 96, 7-28.

http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/revue_x/fic/96/96x1.pdf

- Weber K. (2008). How Mathematicians Determine if an Argument Is a Valid Proof, Journal for Research in Mathematics Education 39 (4), 431-459.