# *L'argumentation mathématique*

## précurseur problématique
## de la démonstration

# Un postulat

L'**argumentation** est un discours

orienté, il vise la validité d'un énoncé

intentionnel, il cherche à modifier un jugement

critique, il analyse, soutient et défend

**Argumenter** est un acte

qui structure la socialisation

qui instrumente le langage

qui change la valeur épistémique d'un énoncé

qui modifie le rapport à la connaissance

caractérisée par le couple

[énoncé, argumentation]

# Un cadre, l'institution

Cycle 2

- « Le discours produit est argumenté et prend appui sur des observations et des recherches et non sur des croyances. »

Cycle 3

- « Les mathématiques contribuent à construire chez les élèves l'idée de preuve et d'argumentation. »

Cycle 4

- Démontrer : « utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion » → « *moyen mathématique d'accès à la vérité* » en donnant à voir « les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent. »
- « défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation ».

# Une problématique complexe

« Il n’est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme »

« Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d’une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d’expérimentation. »

Le travail de la classe comprend ainsi « des temps de mise en commun et d’argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées) »

# Une problématique transversale

*Argumentation*, *preuve* et *démonstration* sont les mots clés d'une même problématique → la validation

qui traverse l'enseignement obligatoire

Finalité éducative

→ distinguer croyance et connaissance

Finalité didactique

→ répondre à la question du vrai en mathématique

→ distinguer argumentation, preuve, démonstration

→ comprendre la démonstration comme type de preuve

**Des questions**

- Définition des termes (argumentation, preuve, démonstration)
- Tensions entre prouver et comprendre (expliquer)
- Tensions entre convaincre et persuader (interactions humaines)

# Vocabulaire – raisonnement, explication

**Raisonnement**

« organisation de propositions qui est orientée vers un énoncé-cible pour modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissance donné, ou dans un milieu social donné, et qui, par voie de conséquence, en modifie la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies »

→ modifier la valeur épistémique d'un énoncé-cible

« La question de la valeur épistémique résolue, se pose celle de la construction de la cohérence ou appartenance de la nouvelle production au système de connaissance. »

**Explication**

« L'explication n'a pas pour but la modification de la valeur épistémique d'un énoncé-cible : elle ne s'appuie pas du tout sur les valeurs épistémiques des propositions mobilisées, mais seulement sur leur contenu. »

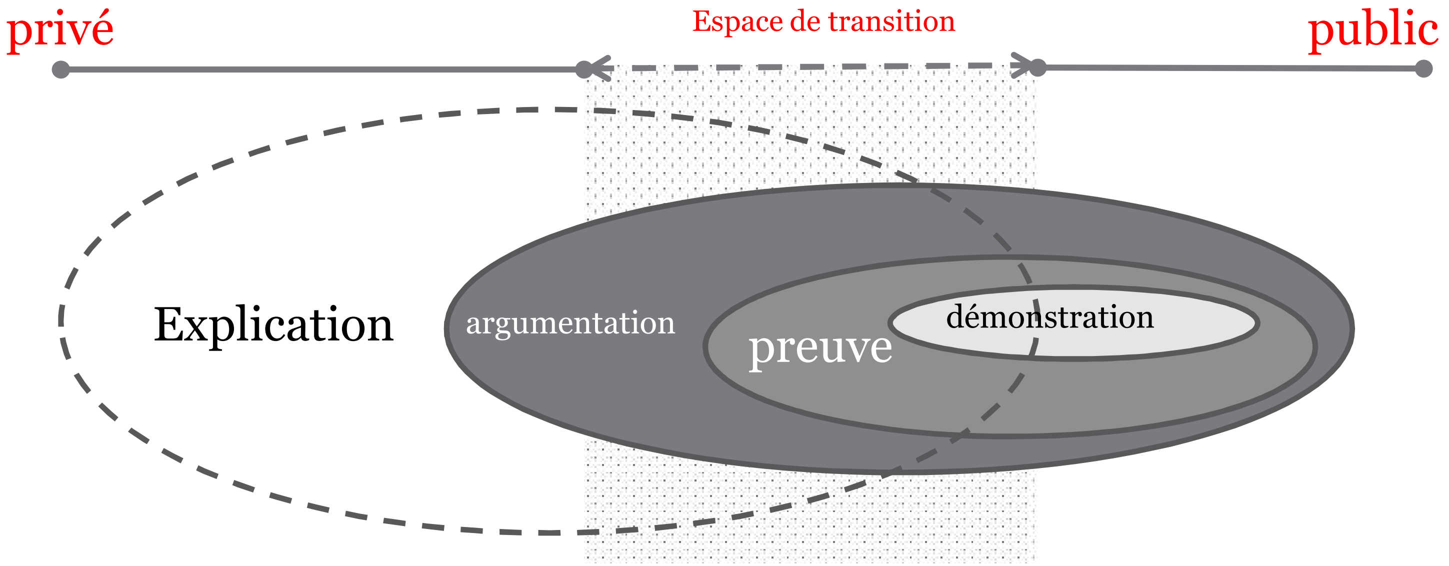
→ système de relations au sein duquel l'énoncé à expliquer trouve sa place

# Vocabulaire – argumentation … démonstration

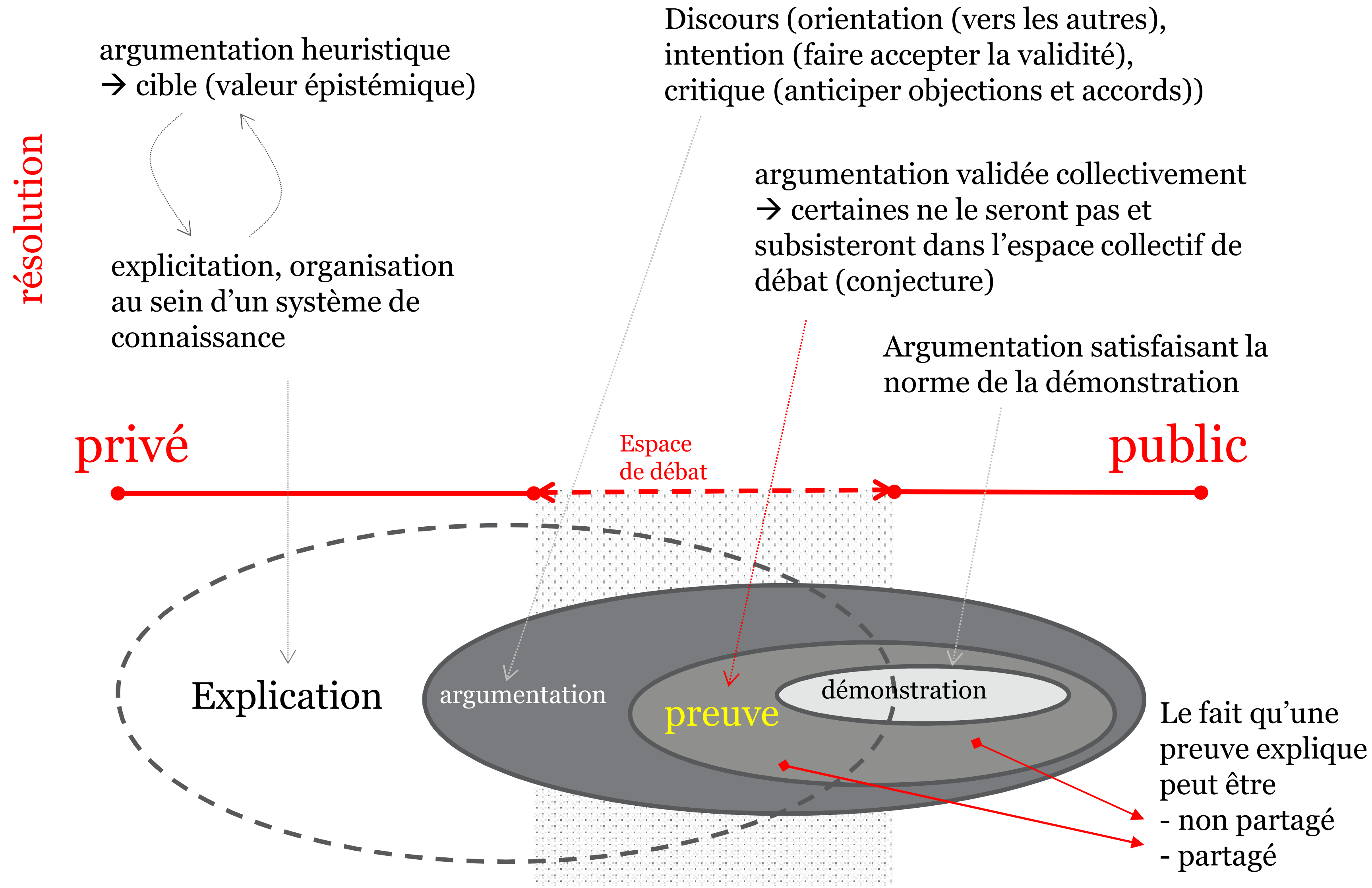
**Argumentation** → vraisemblance et conviction (autrui / soi-même)
**Explication** → validité

Explication (validité) + Discours (*orientation*, *intention*, *critique*)

argumentation acceptée collectivement → **Preuve**
forme particulière de la preuve en mathématiques → **Démonstrations**



# Vocabulaire – argumentation … démonstration



# Vocabulaire – argumentation … démonstration

**Argumentation** → vraisemblance et conviction (autrui / soi-même)
**Explication** → validité

Explication (validité) + Discours (*orientation, intention, critique*)

Argumentation rhétorique vs heuristique
Explication épistémique vs ontique

*« […] while the content of any particular proof is the fruit of a person's epistemic work, it can be separated as an object independent of a particular mind. Other people can read this proof and be convinced by it. This leads us to the question whether showing why a theorem is true is a feature of the proof itself or a feature of communicative acts, texts or representations. »*
(Delarivière, Frans, & Van Kerkhove, 2017. p.3)

# Vocabulaire – argumentation et valeur des énoncés

*Agent = soi, un autre, les autres*

Argumentation rhétorique vs heuristique

rhétorique → convaincre un agent

heuristique → progresser dans la résolution d'un problème

- dans un état donné des connaissances
- dans un contexte donné

→ modifier la valeur épistémique d'un énoncé

Valeur épistémique vs ontique

épistémique → implique la compréhension d'un agent

ontique → indépendance de la compréhension d'un agent

# Illustration 1 – aire et périmètre

Cycle 4, les élèves travaillent en binômes

Dans une classe, les élèves travaillent sur l'aire et le périmètre d'un rectangle. Voici ce qu'en disent certains d'entre eux :

- ***David: deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire.***
- *Suzanne: deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre .*
- *Guy: si on augmente le périmètre d'un rectangle son aire augmente aussi.*
- *Serge: si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi.*
- *Brigitte: tous les rectangles qui ont une aire de 36cm ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24cm.*
- *Louise: pour tout rectangle il en existe un autre qui a la même aire mais dont le périmètre est plus grand.*

Que pensez-vous de ce que raconte chacun de ces élèves : êtes-vous d'accord ou non?

Expliquez pourquoi.

*oui, car ils ont le même périmètre donc ils sont isométriques, sinon ils n'auraient pas la même aire, car la surface est délimitée par le périmètre donc comme le périmètre est [le] même, l'aire est la même.*

Théorème-en-acte : si deux formes sont différentes alors les mesures qui leurs sont associées le sont aussi.

# Illustration 1 – aire et périmètre

Cycle 4, les élèves travaillent en binômes

Dans une classe, les élèves travaillent sur l'aire et le périmètre d'un rectangle. Voici ce qu'en disent certains d'entre eux :

- *David: deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire.*
- *Suzanne: deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre .*
- *Guy: si on augmente le périmètre d'un rectangle son aire augmente aussi.*
- ***Serge: si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi.***
- *Brigitte: tous les rectangles qui ont une aire de 36cm ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24cm.*
- *Louise: pour tout rectangle il en existe un autre qui a la même aire mais dont le périmètre est plus grand.*

Que pensez-vous de ce que raconte chacun de ces élèves : êtes-vous d'accord ou non? Expliquez pourquoi.

*oui, car la délimitation de la surface va être augmentée donc la surface va être augmentée aussi là, les nombres qui se multiplient … qui s'ajoutent [ … ] ben oui, parce que quand tu augmentes le périmètre, la longueur et la largeur augmentent. Donc lorsqu'on les multiplie tous les deux, ça augmente aussi.*

Serge

P : $(l + L) \times 2$.

air : $l \times L$.

augmente :

P : $[(l * L) \times 2] \times 2$.

aire : $(l \times L) \times 2$

# Connaissance, conception, argumentation

**Conception surface-contour**
- cadre spatio-graphique
- perception de la forme

*ils ont le même périmètre donc ils sont isométriques, sinon ils n'auraient pas la même aire, car la surface est délimitée par le périmètre donc comme le périmètre est [le] même, l'aire est la même.*

------

**Conception aire-périmètre**
- cadre arithmétique
- formules

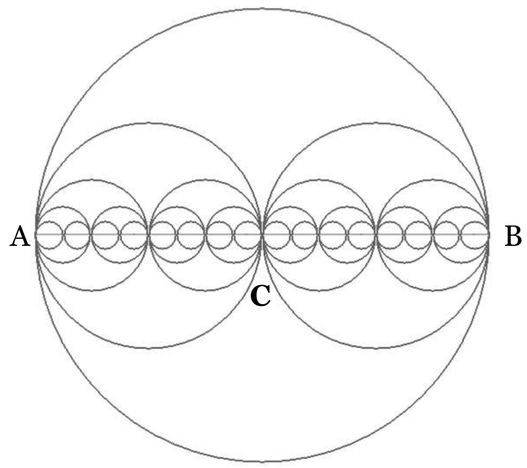
*La délimitation de la surface va être augmentée donc la surface va être augmentée aussi là, les nombres qui se multiplient ... qui s'ajoutent [ ... ] ben oui, parce que quand tu augmentes le périmètre, la longueur et la largeur augmentent. Donc lorsqu'on les multiplie tous les deux, ça augmente aussi.*

## Une connaissance → de multiples conceptions

→ activées selon le problème à résoudre.
→ distinguées par les moyens de représentation et les structures de contrôles (choix, jugements, décisions)

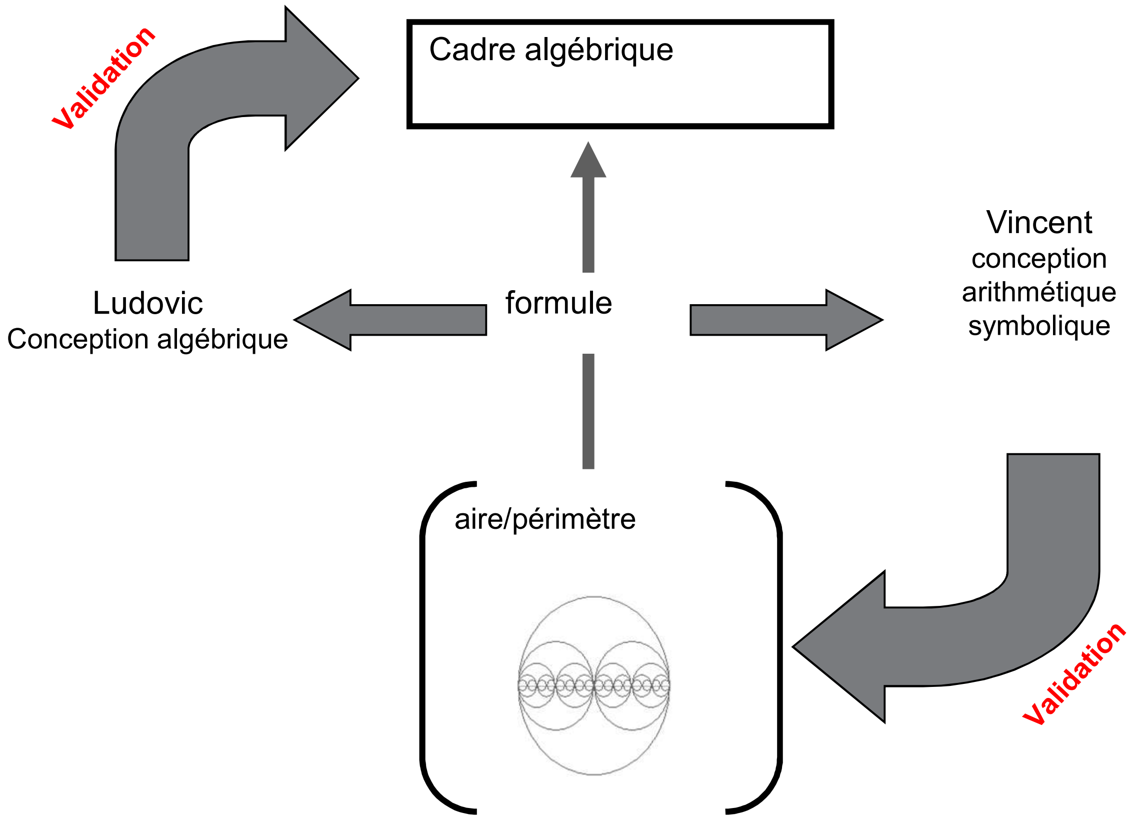
# Illustration 2 – où il est question de limite

A partir d'un segment AB, on construit un cercle ayant AB comme diamètre. Partager AB en deux parties égales, AC et CB. On construit deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultant en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments.
Comment varie la longueur totale des périmètres ?
Comment varie l'aire totale des cercles ?




Vincent : l'aire est à chaque fois divisée par deux…et à la limite?
A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ …
[…]
Vincent : elle tend à zéro […] oui mais alors le périmètre ?
Ludovic: non, le périmètre est toujours le même
Vincent : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment
[…]
Vincent : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi… je ne sais pas…
Ludovic: Je finis la première démonstration

# Illustration 2 – où il est question de limite



# Types d'argumentation / preuve

David Tall et al., 2011

- « Children or novices do not initially think deductively. »
- « It is only much later—usually at college level—that axiomatic formal proof arises in terms of formal definitions and deductions »

→to rethink the nature of mathematical proof and to consider the use of different types of proof related to the cognitive development of the individual.

pas seulement → problématique épistémique

Piaget

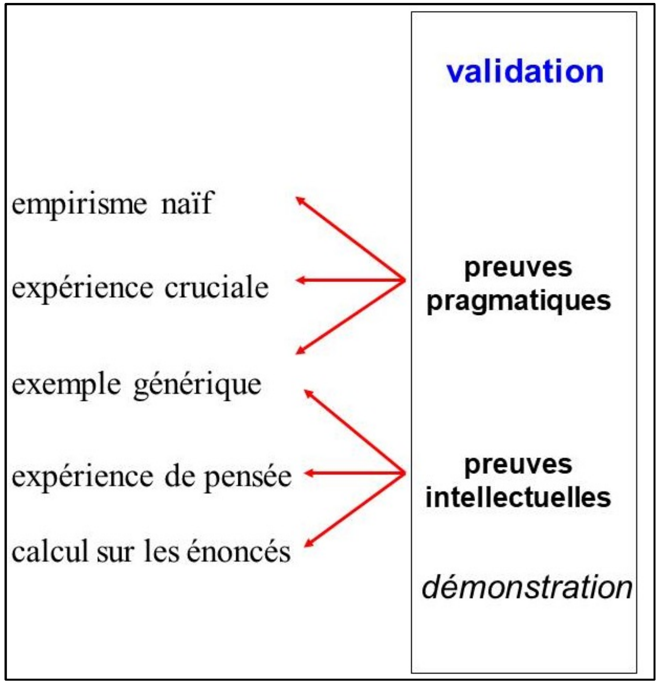
Le développement de la pensée représentative passe par deux grandes étapes caractérisées par la nature des rapports aux objets qu'elle considère et par la nature des structures logiques qui sous-tendent les conduites et les notions des sujets.

Quelles types de preuves disponibles avant l'apprentissage de la démonstration ?

Quelle place leur donner dans l'enseignement ?

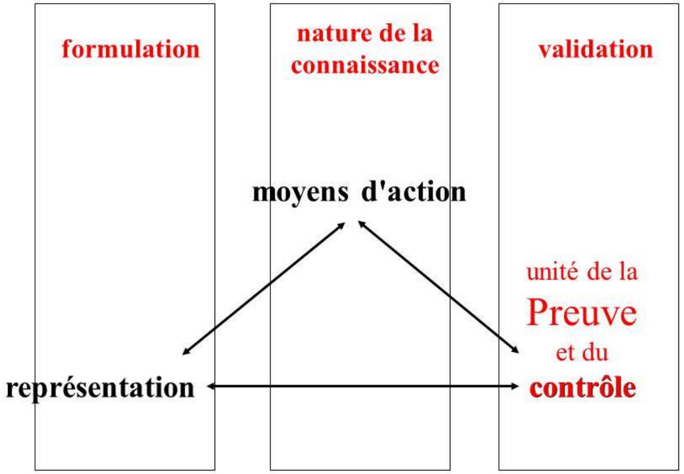
Quels interactions entre argumentation et conceptions ?

# Types d'argumentation / preuve




Il ne s'agit pas de caractériser l'élève, mais de qualifier une validation qui est assujettie au connaissances, à la situation, à une logique de la pratique (fut-elle théorique)

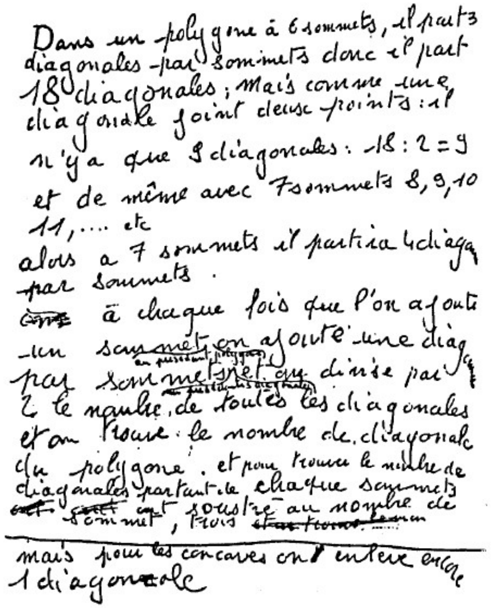
*La signification d'un processus de validation ne peut être saisie sans l'examen des conceptions que les élèves mobilisent, et celle de la lecture qu'ils font de la situation dans laquelle ils se trouvent.*




**Comprendre le lien entre connaissance et preuve**

# Exemple générique

explicitation des raisons de la validité d'un énoncé par la réalisation d'opérations *sur* un objet bon représentant d'une classe *et* non présent pour lui-même.


Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales ; mais comme une diagonale joint deux points : il n'y a que 9 diagonales : 18 : 2 = 9
et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 11, .... etc
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales par sommets.
à chaque fois que l'on ajoute un sommet au précédent polygone on ajoute une diag par sommet aux précédentes diagonales et on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonale du polygone. et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommets on soustrait au nombre de sommet, trois
mais pour les concaves on enlève encore 1 diagonale

- dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales, mais une diagonale joint deux points il n'y a que 9 diagonales : 18:2=9
- et de même avec 7 sommets 8, 9, 10, 11, etc.
- alors à 7 sommets il partira 4 diagonales par sommet
- à chaque fois que l'on ajoute un sommet au précédent polygone on ajoute une diagonale par sommet aux précédentes diagonales et on divise par deux le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonales du polygone.

# Exemple générique

Coordination de plusieurs modalités :

- discours,
- visualisation
- gestes

→ mouvement d'abstraction et de modélisation

*Contexte : étude des propriétés des nombres liées à la parité.*

*Niveau : début du cycle 3 (environ 10 ans), Singapour*

**pair+pair**

(tout en dessinant) donc il y a une paire dans 3 et deux paires dans 5 puis… comme tu peux le voir… il y a toujours un *un* de coté… alors si tu les mets ensemble… c'est une autre paire. Donc c'est égal à un autre nombre pair.

*"(draws) so there is one pair in 3 and two pairs in 5 and then … as you can see right… there is one… there is always an odd one out … so if you plus them together … it's another pair. So it equals to another even number."* – Jarle

**Impair+impair**

Parce que le nombre impair a un reste mais le nombre pair n'a pas de reste. Donc si tu mets le reste de coté, alors les deux s'additionnent, et plus le reste c'est égal à un nombre impair.

*"(O + E) Because the odd number has a remainder but the even number does not have a remainder. Then if you put the remainder somewhere, beside, aside first, then both of them add together, then plus the remainder equals to an odd number."* – Stacy

# Exemple générique

Défi de la représentation
- → des objets
- → des relations

Explicitation des raisons

généralisation et construction du caractère probatoire

V $2+10=12$ $10-2=8$

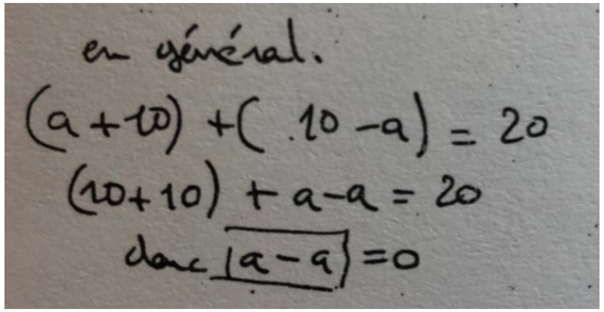
$12+8=20$

donc $(2+10)+(10-2)=20$

$(10+10)+(2-2)=20$

Il y aura toujours 10+10

J'ai choisi 2 et il s'annule donc si je choisi un autre nombre entre 1 et 10 il s'annulera toujours et ce sera toujours égale à 20.


en général.

$(a+10)+(10-a)=20$

$(10+10)+a-a=20$

donc $\boxed{a-a}=0$

réthorique → heuristique
épistémique → ontique

Exemple repris de Balacheff 1976

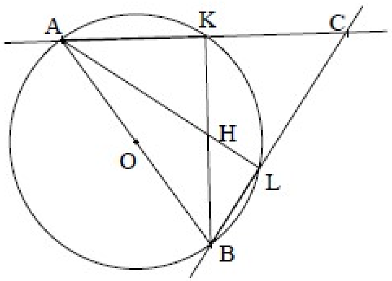
# Le langage, mais pas seulement…

Un texte d'exercice en classe de Quatrième :

Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 3 cm. Tracer un diamètre [AB]. Placer deux points K et L sur le cercle $\mathcal{C}$ tels que K et L sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

1) Démontrer que les triangles AKB et ALB sont rectangles.
2) Les droites (AK) et (BL) se coupent en C. Les droites (AL) et (BK) se coupent en H.

   Démontrer que (CH) est perpendiculaire à (AB).




1) On sait que AB est un diamètre, K et L sont placés dans un même demi-cercle et sur le cercle $\mathcal{C}$.
   Si un triangle a un côté qui est un diamètre et un point sur un cercle $\mathcal{C}$ alors les triangles sont rectangles.
   Donc KAB est un triangle rectangle en K.
   ALB est un triangle rectangle en L.
2) On sait que L est perpendiculaire à (BC)
   K est perpendiculaire à (AC)
   Et que les 2 points passent par un sommet.
   Dans un triangle les 3 hauteurs se coupent en un seul point qui s'appelle l'orthocentre.
   Donc : $(CH) \perp (AB)$.

« N'est-il pas préférable de le laisser s'exprimer dans son langage ? »

« analyser cette réponse, dans son langage, afin de détecter les éléments positifs de son discours. »

→ analyser le processus et la production dans le référentiel de l'élève

# Le langage, mais pas seulement…

« L'anticipation de la validation est fondamentalement dans la constitution du projet de l'élève, y compris pendant la phase de résolution »

- → choix de la méthode / stratégie
- → conduite de la résolution
- → fin de résolution
- → interprétation [distinction résultat/réponse]

→ Structure de contrôle : ensemble des moyens et procédures pour juger, vérifier, choisir, valider

→ décider

# Le langage, mais pas seulement…

action, formulation, validation
interdépendants

au sein du complexe
- problèmes (finalité)
- systèmes de représentation
- opérations disponibles
- moyens de validation

Structure de contrôle

ensemble hiérarchisé de moyens et procédures pour juger, vérifier, choisir, valider
- Les contrôles référents guident la recherche de solution
- Les contrôles d'instrumentation guident le choix des opérateurs
- Les contrôles locaux garantissent le bon usage d'un opérateur

Le langage, mais pas seulement…

# Expérience mentale

L'action est invoquée en la détachant
- de sa réalisation sur un objet particulier,
- de son contexte anecdotique
- de son auteur

En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaqpoint, le nombre de sommets – (ses deux voisins + lui même)

~~[illegible]~~

il faudrait multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales).

~~MAIS [illegible]~~

MAIS, on compte ~~chaque diagonale deux fois~~

Le nombre de diagonales tout est donc à diviser par deux [illegible] et on obtient une fois chaque diagonale

- En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets – (ses deux voisins + lui-même)
- Il faut multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet il part le même nombre de diagonales)
- Mais on compte chaque diagonale deux fois. Le nombre de diagonales est donc à diviser par deux et on obtient une fois chaque diagonale.

expression d'une action intériorisée sur des objets désignés

# Le langage, mais pas seulement… Expérience mentale

… il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation $y=b$ dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses $x_0$ et $x$ ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise.

En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$ et $x=x_1$, la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ et qui passe 1° par le point correspondant aux coordonnées $x_0$, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées $x_1$ et $f(x_1)$, sera continue entre ces deux points; et, comme l'ordonnée constante $b$ de la droite qui a pour équation $y=b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(x_1)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

*Cauchy, cours d'analyse de 1821*

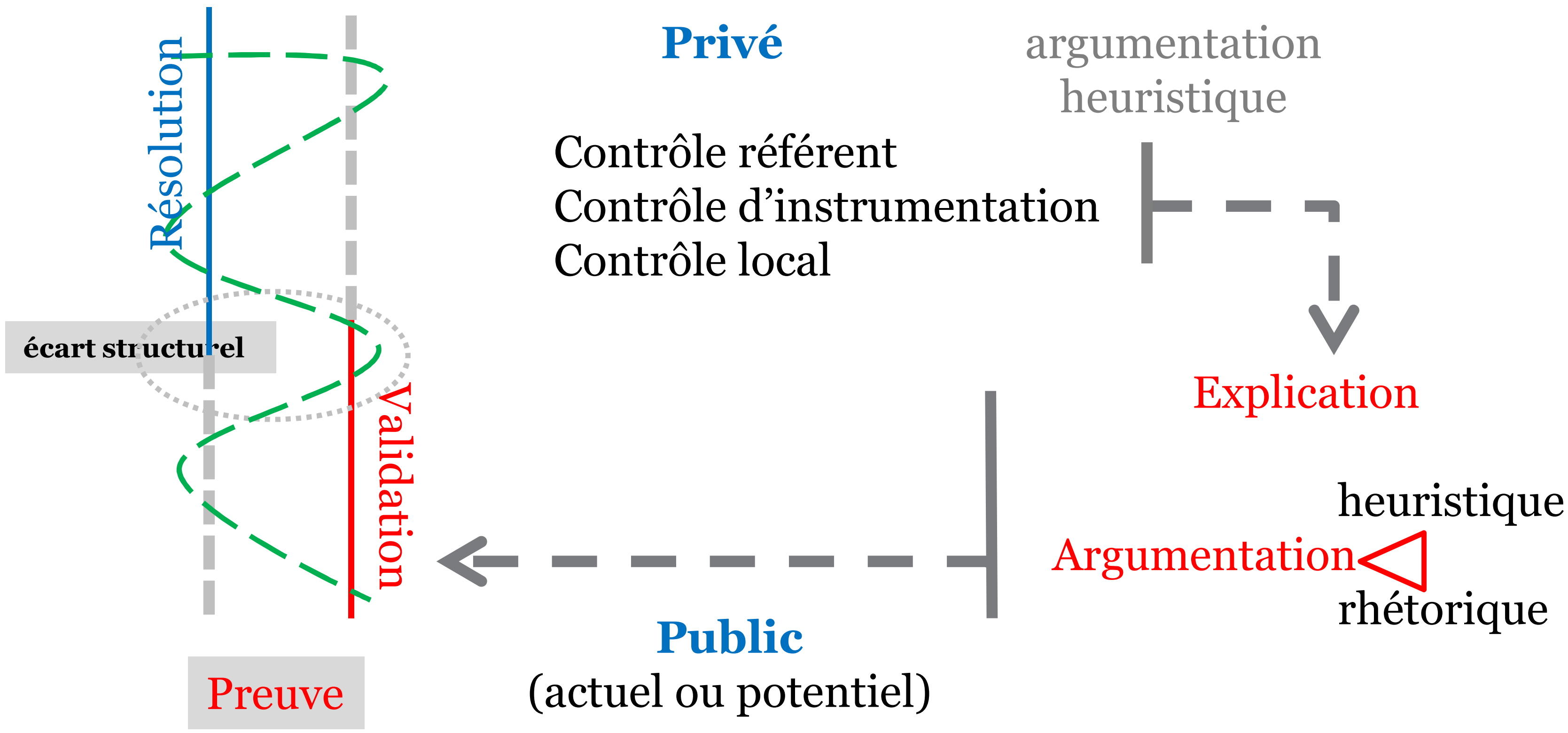
Remarque sur le théorème des valeurs intermédiaires.

- La notion of variable domine celle de fonction (variable dépendante) avec une conception dynamique de la convergence qui influe sur celle de limite et de continuité.
- La continuité est définie sur un intervalle et non en un point, elle est intimement liée à la perception de la continuité graphique de la courbe.
- Les quantificateurs ne sont pas disponibles (il faut attendre le XX° siècle)

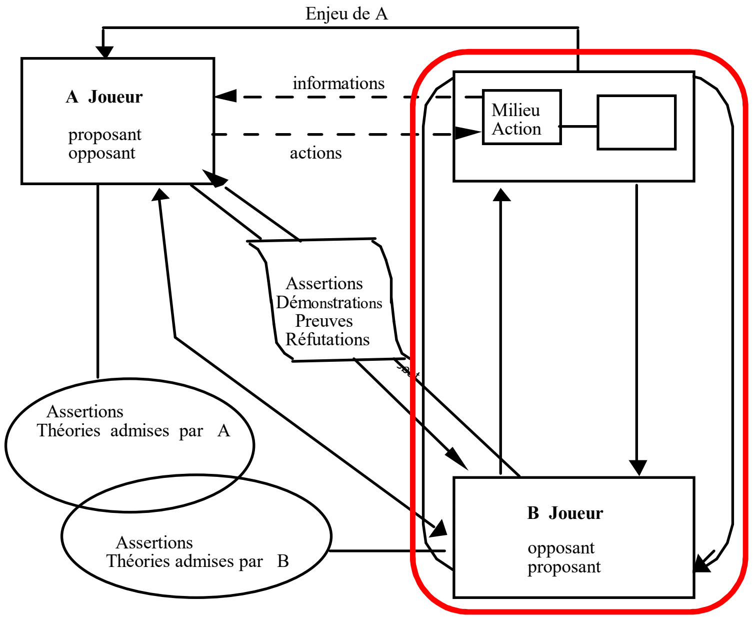
L'analyse est menée en prenant en compte la situation, technique et épistémologique, des mathématiques dans la première moitié du XIX° siècle.

# Contrôle, preuve et validation synthèse

Structure de contrôle : ensemble hiérarchisé de moyens et procédures pour juger, vérifier, choisir, valider



# De l’importance de la situation



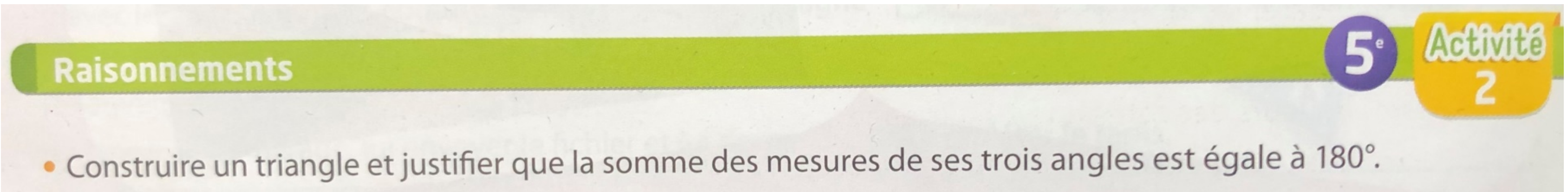

Milieu pour la validation

La résolution engage des interactions avec un milieu matériel ou immatériel.

La validation, collaborative ou délibérative, implique le locuteur (proposant/actant) et l’auditeur (opposant/ rétroactant)

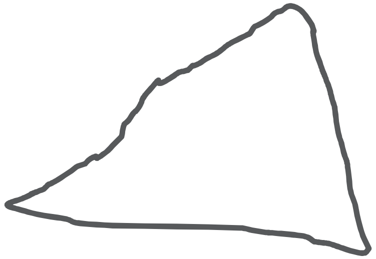
→ Partage d’un registre langagier

→ Partage de règles de débat

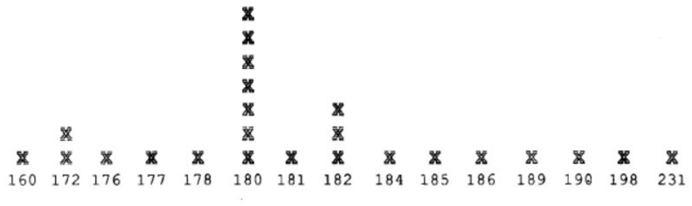


# Illustration 3 – la somme des angles d'un triangle

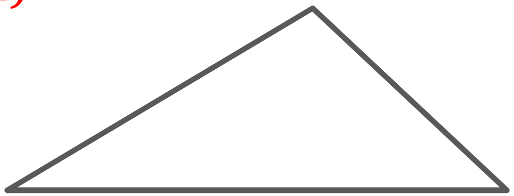
(1)



Chacun trace et mesure sur *son* triangle



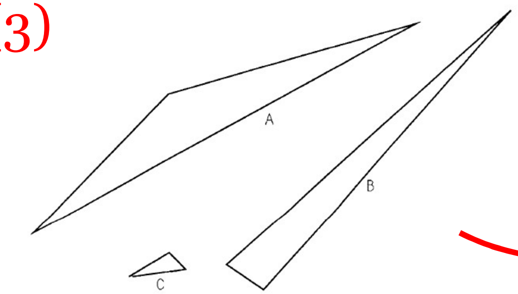

(2)



Un *même triangle* photocopié pour tous

163 X
180 XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX X
181 XX
182 X

(3)




Collectivement anticiper le résultat

Conjecture 180°

# Illustration 3 – la somme des angles d'un triangle

## **Option 1** : construire les règles

Neutralité vis-à-vis des élèves qui pensent que la valeur de la somme des angles dépend de la forme du triangle ; légitimité du doute : réfuter l'invariant ou en produire une preuve ?

Prévalence de l'action sur la règle → la découverte d'une preuve acceptée collectivement détourne du besoin de règles.

*Validé pour le triangle rectangle (« moitié » du rectangle)*

## **Option 2** : donner les règles

Les règles du jeu du débat sont données a priori, l'enseignant se trouve de fait en position de juge.

L'injonction de prouver → sensibilité à l'instrumentalisation des règles au service d'un jeu social plus large.

# Argumentation, précurseur problématique

~~Rhétorique~~

~~Heuristique~~

Prendre la preuve comme objet

→ Normalisation du discours

→Dépersonnalisation

→Décontextualisation

→Détemporalisation

→ Normalisation de la référence

Théorème = {théorie, énoncé, démonstration}

*Mariotti*

Institutier des formes de preuve

# Argumentation, précurseur problématique

**Japon** → organisation quasi-axiomatique (choix des propriétés fondamentales, construction d'un système)

*Quasi* = certaines propriétés introduites par l'observation ou admises…

**France** → organisation locale (répertoire de théorèmes et propriétés, pas d'ensemble distingué comme tel)

Utilisation des preuves pour *établir des relations entre propriétés ou objets géométriques*.

→ Normalisation de la référence

$$\text{Théorème} = \{\text{théorie}, \underbrace{\text{énoncé, démonstration}}_{\text{Instituer des formes de preuve}}\}$$

*Mariotti*

# Argumentation, précurseur problématique

Rhétorique

Heuristique

Prendre la preuve comme objet

→ Normalisation du discours

→ dépersonnalisé

→ décontextualisé

→ atemporel

→ Normalisation de la référence

¿ Création d'une norme socio-mathématique

Institutionnalisation ?

preuve

*Un atout :*

*Faible distance discursive entre argumentation et démonstration*

(Duval 1992)

# Références



**Anscombre, J.-C., & Ducrot, O.** (1983). *L'argumentation dans la langue*. Bruxelles: Pierre Mardaga, éditeur.

* **Arsac, G. (2013).** *Cauchy, Abel, Seidel, Stokes et la convergence uniforme: De la difficulté historique du raisonnement sur les limites*. Hermann

**Balacheff, N.** (1987a). *Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture* (No. 39). Paris: IREM de Paris VII.

* **Balacheff, N.** (1987b). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176.

**Balacheff, N.** (1988a). Le contrat et la coutume, deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Ed.), *Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques* (pp. 15–26). Marseille-Luminy: La Pensée Sauvage.

**Balacheff, N.** (1988b). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Thèse, Université Grenoble.

**Balacheff, N.** (1995). Conception, propriété du système sujet/milieu. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

* **Balacheff, N.** (2017). cK¢, a model to understand learners' understanding . *El Calculo y Su Ensenanza*, *IX (Jul-Dic)*, 1–23.

* **Brousseau, G.** (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

**Delarivière, S., Frans, J., & Van Kerkhove, B.** (2017). Mathematical Explanation: A Contextual Approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, *34*(2), 309–329.

* **Duval, R.** (1992). Argumenter, prouver, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31), 37–61.

**EDUSCOL.** (2008). *Raisonnement et démonstration*. Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

**EDUSCOL.** (2016). Raisonner [Institutionnel]. Retrieved 30 September 2018, from éduscol website: http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

**Équipe académique Mathématiques.** (2003). *Initiation au raisonnement*. Retrieved from http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedaclg/dosped/raisonnement/brochure_init_raison/brochure_intro.htm

**Gaudin, N.** (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction*. Thèse, Joseph Fourier, Grenoble.

**Hanna, G.** (2017). Connecting two different views of mathematical explanation. *Enabling Mathematical Cultures*. Presented at the Enabling Mathematical Cultures, Mathematical Institute, University of Oxford. Retrieved from https://enablingmaths.wordpress.com/abstracts/

* **Margolinas, C.** (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

* **Miyakawa, T.** (2016). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: The cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 37–54. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

* **Pedemonte, B.** (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* (Université Joseph Fourrier). Retrieved from https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/file/tel-00004579.pdf

**Plantin, C.** (1990). *Essai sur l'argumentation*. éditions Kimé.

**Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H.** (2011). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 15, pp. 13–49).

**Teo Kwee Huang, & Ng Swee Fong.** (2017). *Relational understanding triumphs over instrumental understanding: the case of Singapore primary four children's understandings of odd and even numbers.* Poster presented at the Educational Research Association of Singapore.